SVEUČILIŠTE U SPLITU
GRAĐEVINSKO-ARHITEKTONSKI FAKULTET

Alen Harapin
Boris Trogrlić

UVOD U METODU KONAČNIH ELEMENATA ŠTAPNI SUSTAVI U RAVNINI

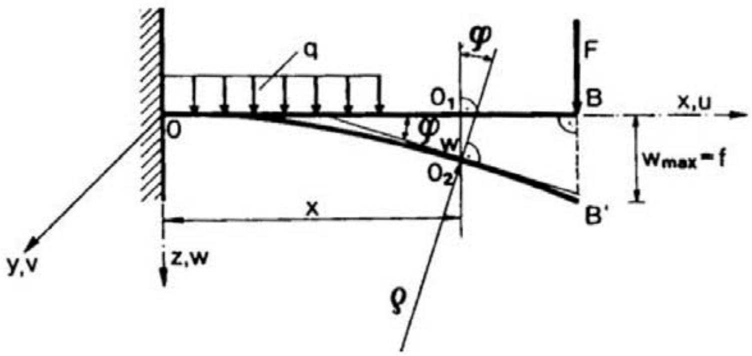
INTERNA SKRIPTA

PREDMET: PROJEKTIRANJE KONSTRUKCIJA RAČUNALOM

Split, 2009.

1. DEFORMACIJA RAVNOG ŠTAPA PRI SAVIJANJU

Ako promotrimo ravni pravocrtni štap u ravnini opterećen silama [7], tada, nakon deformiranja štap poprima zakrivljeni oblik.



Ovaj oblik naziva se elastična ili progibna linija nosača. Zakrivljenost nosača kod čistog savijanja može se opisati sljedećim izrazom:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I} \qquad (1.1)$$

Zakrivljenost krivulje (matematički izraz):

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (1.2)$$

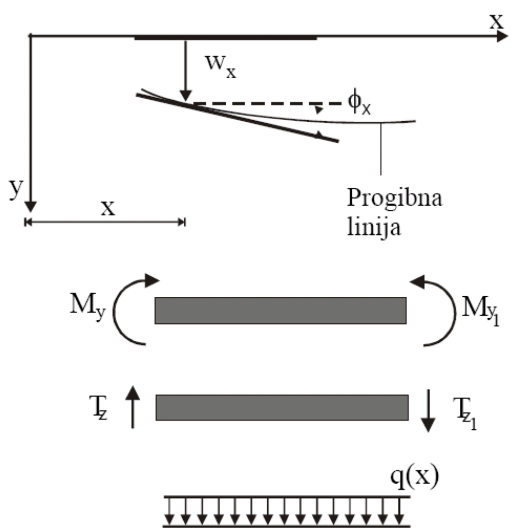
Kad su pomaci štapa mali u odnosu na duljinu štapa, možemo zanemariti član: $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2$ kao diferencijalno malu veličinu višeg reda, pa se diferencijalna jednadžba progibne linije može napisati u obliku:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad \text{ili} \quad EI\,\frac{d^2w}{dx^2} = -M \qquad (1.3)$$

Deriviranjem po x slijedi:

$$\begin{aligned} EI\,\frac{d^3w}{dx^3} &= -T \\ EI\,\frac{d^4w}{dx^4} &= -q(x) \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Mehaničko značenje matematičkih veličina:



$w = w(x)$ - progib

$\dfrac{dw}{dx} = \varphi(x)$ - kut zaokreta progibne linije

$M = -EI\,\dfrac{d^2w}{dx^2}$ - moment savijanja

$T = -EI\,\dfrac{d^3w}{dx^3}$ - poprečna sila

$q(x) = -EI\,\dfrac{d^4w}{dx^4}$ - opterećenje

EI - krutost presjeka na savijanje

2. FORMULACIJA METODOM KONAČNIH ELEMENATA

2.1 UVOD

Koriste se dvo-čvorni pravocrtni, idealno ravni, po dijelovima prizmatični konačni elementi, sa po 3 stupnja slobode u čvoru, kakvi su korišteni u nizu radova [1, 2, 3, 4, 5, 6].

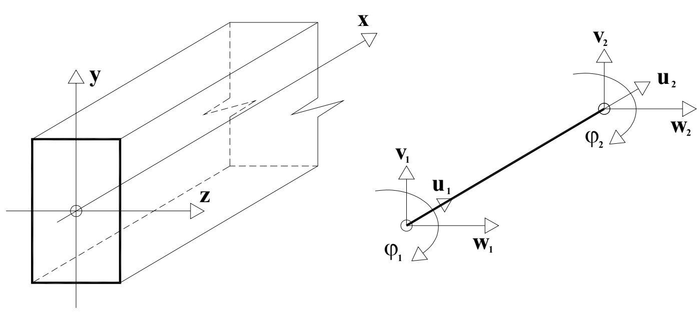
U nastavku je ukratko opisan numerički postupak, detaljnije prikazan u lit. [1].

2.2 JEDNADŽBA RAVNOTEŽE LINEARNOG SUSTAVA

Postupak je proveden za štap koji zadovoljava sljedeće pretpostavke:

- prizmatičan je,
- načinjen je od idealno elastičnog materijala (materijalna linearnost),
- vrijedi hipoteza ravnih presjeka,
- vrijedi hipoteza malih pomaka i malih deformacija (geometrijska linearnost),
- zanemaruje se posmično deformiranje,
- ravnoteža se uspostavlja na osnovnom (polaznom) sustavu.

Neka je os x uzdužna os elementa, a osi y i z osi tromosti presjeka elementa (crtež 1).



***Crtež 1** – Opis štapa*

Tada se jednadžba ravnoteže na diferencijalnom dijelu elementa može napisati kao:

$$\mathbf{LQ} - \mathbf{f} = 0 \quad \text{(2.1)}$$

gdje su **Q** – vektor unutrašnjih sila i **f** – vektor opterećenja:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \{N_1, T_1, M_1\}^T \\ \mathbf{f} &= \{f_x, f_y, m_z\}^T \end{aligned} \quad \text{(2.2)}$$

a **L** diferencijalni operator oblika (formalni zapis):

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} d/dx & 0 & 0 \\ 0 & d/dx & 0 \\ 0 & 0 & d/dx \end{bmatrix} \quad \text{(2.3)}$$

Formalno, za komponente vektora unutrašnjih sila može se pisati:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.4)$$

gdje je **D** matrica krutosti presjeka (koja uključuju njegove materijalne i geometrijske karakteristike), a $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektor deformacije presjeka koji ovisi o vektoru pomaka:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\,\mathbf{p} \qquad \mathbf{p} = \{\mathrm{u}, \mathrm{v}\} \qquad (2.5)$$

Konačno, jednadžbu ravnoteže (2.1) možemo napisati u obliku:

$$\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}\,\mathbf{p} - \mathbf{f} = 0 \qquad (2.6)$$

Da bi se riješilo gornju jednadžbu potrebno je uvesti rubne uvjete, koji u slučaju statičkog problema, predstavljaju zadane sile i pomake na rubovima sustava.

Ovakvo prikazano rješenje (2.6), je u biti još uvijek analitičko. Međutim, veliki broj nepoznanica na stvarnom sustavu i složeni matematički aparat koji je potreban za rješavanje gornjeg sustava jednadžbi vodi k uporabi numeričkih metoda i računala.

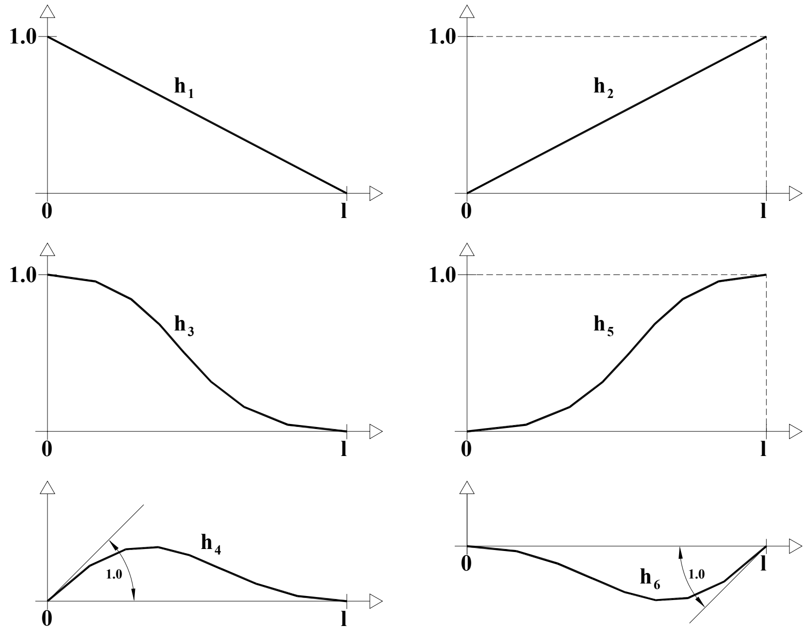
2.3 DISKRETIZACIJA SUSTAVA I BAZNE FUNKCIJE

U nedostatku analitičkih rješenja, rješenje jednadžbe (2.6) se obično traži numeričkim postupcima. Jedan od najčešće primjenjivanih i najpriznatijih postupaka je Metoda ili Tehnika konačnih elemenata. Bit ove metode je da se sustav koji ima beskonačni broj stupnjeva slobode zamijeni (simulira) sustavom koji ima konačan broj stupnjeva slobode. Da bi se to postiglo pretpostavljamo (programiramo) ponašanje niza točaka sustava na jednom konačnom elementu, vezano uz određeni broj fiksnih, prethodno određenih točaka (čvorova) na tom istom elementu.

Pretpostavimo približno rješenje za polje pomaka:

$$\mathbf{p} = \widehat{\mathbf{p}} = \mathbf{H}\,\mathbf{u} \qquad (2.7)$$

gdje je **H** matrica baznih funkcija a **u** vektor nepoznatih čvornih pomaka. Bazne (oblikovne) funkcije se najčešće za štapne sustave biraju iz grupe Hermite-ovih polinoma, a prikazane su na crtežu 2, skupa sa svojim algebarskim izrazima, pri čemu je ℓ duljina štapa.



$$h_1 = 1 - \frac{x}{\ell}$$

$$h_2 = \frac{x}{\ell}$$

$$h_3 = 2\frac{x^3}{\ell^3} - 3\frac{x^2}{\ell^2} + 1$$

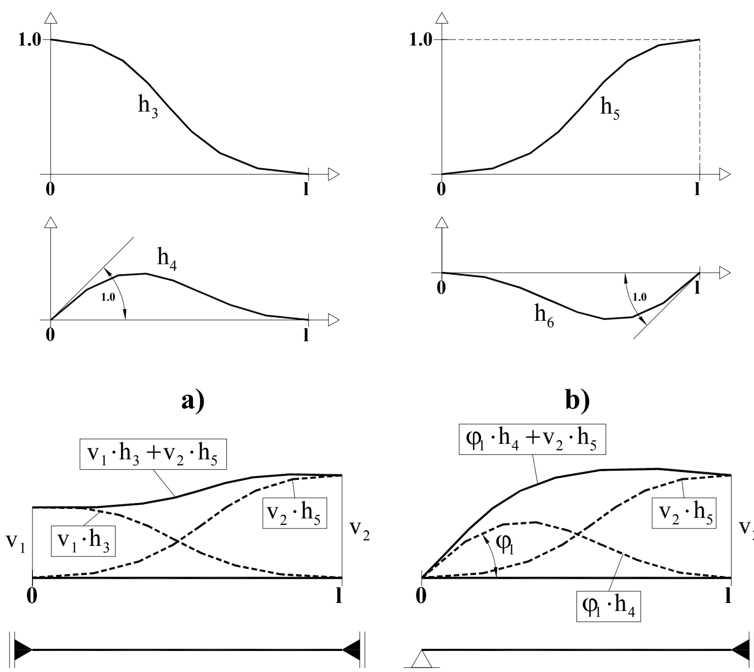
$$h_4 = \frac{x^3}{\ell^2} - 2\frac{x^2}{\ell} + x$$

$$h_5 = -2\frac{x^3}{\ell^3} + 3\frac{x^2}{\ell^2}$$

$$h_6 = \frac{x^3}{\ell^2} - \frac{x^2}{\ell}$$

***Crtež 2** – Bazne funkcije*

Nepoznati pomaci se (numerički) izračunavaju u tzv. čvorovima, koji su povezani elementima. Za čvorove se rješenje dobiva direktno, a za elemente (štapove) se rješenje aproksimira preko (2.8). Na primjer, pomaci okomiti na os štapa, u bilo kojoj točki štapa mogu se prikazati preko pomaka u krajevima štapa i odgovarajućih baznih funkcija. Tako je u slučaju (a) prikazano polje pomaka kada su oba kraja štapa upeta, a postoji pomak, a u slučaju (b) kada je lijevi kraj štapa pridržan (dozvoljena rotacija), a desni klizno upet.



***Crtež 3** – Prikaz polja pomaka*

Polje pomaka se može napisati kao:

$$\mathbf{p} = \widehat{\mathbf{p}} = \mathbf{H}\,\mathbf{u} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_4 & 0 & h_5 & h_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad \text{.......(2.8)}$$

Polje deformacija može se izračunati iz:

$$\varepsilon = \mathbf{L}\,\mathbf{H}\,\mathbf{u} = \mathbf{B}\,\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \dfrac{dh_1}{dx} & 0 & 0 & \dfrac{dh_2}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{d^2h_3}{dx^2} & \dfrac{d^2h_4}{dx^2} & 0 & \dfrac{d^2h_5}{dx^2} & \dfrac{d^2h_6}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad \text{.......(2.9)}$$

gdje je B matrica deformacija (matrica derivacija baznih funkcija).

2.4 FORMULACIJA PRINCIPOM VIRTUALNOG RADA

Ako virtualne pomake odaberemo iz porodice Hermite-ovih funkcija, od kojih je konstruirano i približno rješenje (2.8), tada iz jednakosti vanjskih i unutrašnjih sila slijedi:

$$\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{s} + \int \hat{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{f}\,dx = \int \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\,\boldsymbol{\sigma}\,dx \quad \text{.......(2.10)}$$

$$\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{s} + \int \hat{\mathbf{p}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{f}\,dx = \int \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,dx \quad \text{.......(2.11)}$$

odnosno:

$$\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{s} + \int \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{f}\,dx = \int \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{D}\,\mathbf{B}\right)\mathbf{u}\,dx \quad \text{.......(2.12)}$$

tj., nakon dijeljenja s lijeve strane s $\mathbf{u}^{\mathbf{T}}$:

$$\mathbf{s} = \int \left(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{D}\,\mathbf{B}\right)\mathbf{u}\,dx - \int \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{f}\,dx \quad \text{.......(2.13)}$$

ili skraćeno:

$$\mathbf{s}^{\mathrm{e}} = \mathbf{k}^{\mathrm{e}}\,\mathbf{u} - \mathbf{F}^{\mathrm{e}} \quad \text{.......(2.14)}$$

gdje su:

- $\mathbf{s}^{\mathrm{e}}$ - vektor reznih sila na krajevima konačnog elementa
- $\mathbf{k}^{\mathrm{e}}$ - matrica krutosti elementa
- $\mathbf{F}^{\mathrm{e}}$ - vektor sila pune upetosti

Ako iskoristimo izraz (2.9), možemo napisati:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dx} & 0 & 0 & \frac{dh_2}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2h_3}{dx^2} & \frac{d^2h_4}{dx^2} & 0 & \frac{d^2h_5}{dx^2} & \frac{d^2h_6}{dx^2} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}$$

Tj.

$$\mathbf{k} = \int \left(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\, \mathbf{D}\, \mathbf{B} \right) dx =$$

$$\int_0^{\ell} \begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2h_3}{dx^2} \\ 0 & \frac{d^2h_4}{dx^2} \\ \frac{dh_2}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d^2h_5}{dx^2} \\ 0 & \frac{d^2h_6}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dx} & 0 & 0 & \frac{dh_2}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2h_3}{dx^2} & \frac{d^2h_4}{dx^2} & 0 & \frac{d^2h_5}{dx^2} & \frac{d^2h_6}{dx^2} \end{bmatrix} dx =$$

$$\int_0^{\ell} \begin{bmatrix} EA\left(\frac{dh_1}{dx}\right)^2 & 0 & 0 & EA\frac{dh_1}{dx}\frac{dh_2}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & EI\left(\frac{d^2h_3}{dx^2}\right)^2 & EI\frac{d^2h_3}{dx^2}\frac{d^2h_4}{dx^2} & 0 & EI\frac{d^2h_3}{dx^2}\frac{d^2h_5}{dx^2} & EI\frac{d^2h_3}{dx^2}\frac{d^2h_6}{dx^2} \\ 0 & EI\frac{d^2h_4}{dx^2}\frac{d^2h_3}{dx^2} & EI\left(\frac{d^2h_4}{dx^2}\right)^2 & 0 & EI\frac{d^2h_4}{dx^2}\frac{dh_5}{dx^2} & EI\frac{d^2h_4}{dx^2}\frac{d^2h_6}{dx^2} \\ EA\frac{dh_2}{dx}\frac{dh_1}{dx} & 0 & 0 & EA\left(\frac{dh_2}{dx}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & EI\frac{d^2h_5}{dx^2}\frac{d^2h_3}{dx^2} & EI\frac{d^2h_5}{dx^2}\frac{d^2h_4}{dx^2} & 0 & EI\left(\frac{d^2h_5}{dx}\right)^2 & EI\frac{d^2h_5}{dx^2}\frac{d^2h_6}{dx^2} \\ 0 & EI\frac{d^2h_6}{dx^2}\frac{d^2h_3}{dx^2} & EI\frac{d^2h_6}{dx^2}\frac{d^2h_4}{dx^2} & 0 & EI\frac{d^2h_6}{dx^2}\frac{d^2h_5}{dx^2} & EI\left(\frac{d^2h_6}{dx^2}\right)^2 \end{bmatrix} dx$$

Pa se lako mogu izračunati članovi matrice krutosti. U ovom slučaju (štapni sustavi) članovi matrice krutosti se mogu izračunati direktnom integracijom članova gornje matrice (prikazano u nastavku). U općem slučaju (ravninski i prostorni problemi, ploče, ljuske…) direktna integracija nije moguća zbog složenosti podintegralnih funkcija, pa se koristi numerička integracija, najčešće Gaussova integracija (vidjeti npr. literaturu [6]).

Primjer izračuna članova matrice krutosti:

Član (2, 2):

$$\int_0^{\ell} EI\left(\frac{d^2h_3}{dx^2}\right)^2 dx$$

$$\frac{dh_3}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1-3\frac{x^2}{\ell^2}+2\frac{x^3}{\ell^3}\right) = -6\frac{x}{\ell^2}+6\frac{x^2}{\ell^3}$$

$$\frac{d^2h_3}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-6\frac{x}{\ell^2}+6\frac{x^2}{\ell^3}\right) = -6\frac{1}{\ell^2}+12\frac{x}{\ell^3}$$

$$\int_0^{\ell} EI\left(\frac{dh_3}{dx}\right)^2 dx = EI\int_0^{\ell}\left(-6\frac{1}{\ell^2}+12\frac{x}{\ell^3}\right)^2 dx = EI\int_0^{\ell}\left(36\frac{1}{\ell^4}-144\frac{x}{\ell^5}+144\frac{x^2}{\ell^6}\right) dx =$$

$$EI\cdot\left[36\frac{x}{\ell^4}-72\frac{x^2}{\ell^5}+48\frac{x^3}{\ell^6}\right]_0^{\ell} = EI\cdot\left[\frac{36-72+48}{\ell^3}\right] = \frac{12\ EI}{\ell^3}$$

Član (6, 6):

$$\int_0^{\ell} EI\left(\frac{d^2h_6}{dx^2}\right)^2 dx$$

$$\frac{dh_3}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^2}{\ell}+\frac{x^3}{\ell^2}\right) = -2\frac{x}{\ell}+3\frac{x^2}{\ell^2}$$

$$\frac{d^2h_3}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-2\frac{x}{\ell}+3\frac{x^2}{\ell^2}\right) = -2\frac{1}{\ell}+6\frac{x}{\ell^2}$$

$$\int_0^{\ell} EI\left(\frac{dh_3}{dx}\right)^2 dx = EI\int_0^{\ell}\left(-2\frac{1}{\ell}+6\frac{x}{\ell^2}\right)^2 dx = EI\int_0^{\ell}\left(4\frac{1}{\ell^2}-24\frac{x}{\ell^3}+36\frac{x^2}{\ell^4}\right) dx =$$

$$EI\cdot\left[4\frac{x}{\ell^2}-12\frac{x^2}{\ell^3}+12\frac{x^3}{\ell^4}\right]_0^{\ell} = EI\cdot\left[\frac{4-12+12}{\ell}\right] = \frac{4\ EI}{\ell}$$

Član (2, 6):

$$\int_0^{\ell} EI\left(\frac{d^2h_3}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2h_6}{dx^2}\right)dx$$

$$\int_0^{\ell} EI\left(\frac{dh_3}{dx}\right)^2 dx = EI\int_0^{\ell}\left(-6\frac{1}{\ell^2}+12\frac{x}{\ell^3}\right)\left(-2\frac{1}{\ell}+6\frac{x}{\ell^2}\right)dx =$$

$$EI\int_0^{\ell}\left(12\frac{1}{\ell^3}-36\frac{x}{\ell^4}-24\frac{x}{\ell^4}+72\frac{x^2}{\ell^5}\right)dx =$$

$$EI\cdot\left[12\frac{x}{\ell^3}-30\frac{x^2}{\ell^4}+24\frac{x^3}{\ell^5}\right]_0^{\ell} = EI\cdot\left[\frac{12-30+24}{\ell^2}\right] = \frac{6\ EI}{\ell^2}$$

Itd.

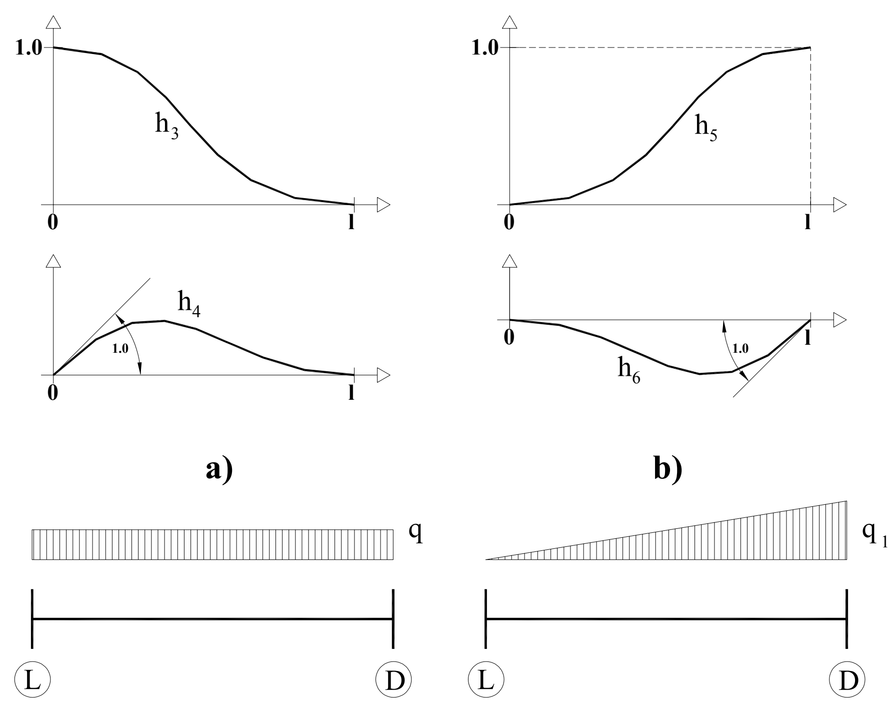
Potpuna matrica krutosti elementa:

$$\mathbf{k}^{e} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ & & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ & & & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \qquad \text{.......} (2.15)$$

2.5 VEKTOR SILA PUNE UPETOSTI

Vektor sila pune upetosti može se izračunati iz izraza (2.13) i (2.14).

$$\mathbf{F}^{e} = \int \mathbf{H}^{T} \mathbf{f}\, dx \quad ; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_4 & 0 & h_5 & h_6 \end{bmatrix} \qquad \text{.......} (2.16)$$



***Crtež 4** – Prikaz izračuna sila pune upetosti*

Primjer: U slučaju „a“ imamo kontinuirano opterećenje, a u slučaju „b“ trokutasto opterećenje duž cijelog konačnog elementa.

Moment pune upetosti i poprečna sila za lijevi kraj (L), za slučaj opterećenja a:

$$M_L = \int_0^\ell q \cdot h_4 \, dx = q \cdot \int_0^\ell \left(x - 2\frac{x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2} \right) dx =$$

$$q \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3 \cdot \ell} + \frac{x^4}{4 \cdot \ell^2} \right)_0^\ell = q \cdot \left(\frac{\ell^2}{2} - 2\frac{\ell^3}{3 \cdot \ell} + \frac{\ell^4}{4 \cdot \ell^2} \right) = q \cdot \left(\frac{6 \cdot \ell^2 - 8 \cdot \ell^2 + 3 \cdot \ell^2}{12} \right) = \frac{q \cdot \ell^2}{12}$$

$$T_L = \int_0^\ell q \cdot h_3 \, dx = q \cdot \int_0^\ell \left(1 - 3\frac{x^2}{\ell^2} + 2\frac{x^3}{\ell^3} \right) dx =$$

$$q \cdot \left(x - 3\frac{x^3}{3 \cdot \ell^2} + 2\frac{x^4}{4 \cdot \ell^3} \right)_0^\ell = q \cdot \left(\ell - 2\frac{\ell^3}{\ell^2} + \frac{\ell^4}{2 \cdot \ell^3} \right) = q \cdot \left(\frac{2 \cdot \ell - 4 \cdot \ell + 1 \cdot \ell}{2} \right) = -\frac{q \cdot \ell}{2}$$

Moment pune upetosti i poprečna sila za desni kraj (D), za slučaj opterećenja b:

$$q = q(x) = \frac{q_1 \cdot x}{\ell}$$

$$M_D = \int_0^\ell q \cdot h_6 \, dx = \int_0^\ell \left(\frac{q_1 \cdot x}{\ell} \right) \left(-\frac{x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2} \right) dx = q_1 \cdot \int_0^\ell \left(-\frac{x^3}{\ell^2} + \frac{x^4}{\ell^3} \right) dx =$$

$$q_1 \cdot \left(-\frac{x^4}{4 \cdot \ell^2} + \frac{x^5}{5 \cdot \ell^3} \right)_0^\ell = q_1 \cdot \left(-\frac{\ell^4}{4 \cdot \ell^2} + \frac{\ell^5}{5 \cdot \ell^3} \right) = q_1 \cdot \left(\frac{-5 \cdot \ell^2 + 4 \cdot \ell^2}{20} \right) = -\frac{q_1 \cdot \ell^2}{20}$$

$$T_D = \int_0^\ell q \cdot h_5 \, dx = \int_0^\ell \left(\frac{q_1 \cdot x}{\ell} \right) \left(3\frac{x^2}{\ell^2} - 2\frac{x^3}{\ell^3} \right) dx = q_1 \cdot \int_0^\ell \left(3\frac{x^3}{\ell^3} - 2\frac{x^4}{\ell^4} \right) dx =$$

$$q_1 \cdot \left(3\frac{x^4}{4 \cdot \ell^2} - 2\frac{x^5}{5 \cdot \ell^3} \right)_0^\ell = q_1 \cdot \left(3\frac{\ell^3}{4 \cdot \ell^2} - 2\frac{\ell^4}{5 \cdot \ell^3} \right) = q_1 \cdot \left(\frac{15 \cdot \ell - 8 \cdot \ell}{2} \right) = \frac{7 \cdot q_1 \cdot \ell}{20}$$

2.6 OTPUŠTANJE VEZA NA RUBOVIMA ELEMENATA

Numerički modeli obično predviđaju mogućnost oslobađanja neke od veza rubova elemenata s okolinom. Time se eliminira (nulira) odgovarajuća sila na rubovima. Postupak kojim se to provodi predstavlja vid lokalne eliminacije.

Jednadžbu ravnoteže konačnog elementa možemo zapisati u obliku:

$$\mathbf{s}^e = \left[\mathbf{k}_{ij}^e \right] \left\{ \mathbf{u}_i \right\} - \left\{ \mathbf{F}_i^e \right\} \quad \text{...} (2.17)$$

i presložiti tako da u prve retke postavimo one jednadžbe čija pripadna veza nije otpuštena. Te jednadžbe označimo indeksom „n“. Iza njih složimo jednadžbe onih veza koje su otpuštene i označimo ih indeksom „o“, pa imamo:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_n^e \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{nn} & \mathbf{k}_{no} \\ \mathbf{k}_{on} & \mathbf{k}_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_o \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_n \\ \mathbf{F}_o \end{Bmatrix} \quad \text{...} (2.18)$$

Kombinacija otpuštanja mora dati $\mathbf{k_{nn}}$ kao regularnu matricu, inače smo otpuštanjem element pretvorili u lokalni mehanizam. Iz grupe jednadžbi otpuštenih veza otpušteni pomaci se mogu izraziti u funkciji neotpuštenih, prema:

$$\mathbf{u_o} = \mathbf{k_{oo}^{-1}}\left(\mathbf{F_o} - \mathbf{k_{on}}\,\mathbf{u_n}\right) \quad \text{(2.19)}$$

Sile u neotpuštenim vezama dobivamo iz grupe jednadžbi neotpuštenih veza kao:

$$\mathbf{s_n^e} = \mathbf{k_{nn}u_n} - \mathbf{k_{no}u_o} - \mathbf{F_n} \quad \text{(2.20)}$$

Uvođenjem (2.19) u (2.20) možemo eliminirati otpuštene pomake:

$$\mathbf{s_n^e} = \mathbf{k_{nn}u_n} + \mathbf{k_{no}k_{oo}^{-1}k_{on}}\,\mathbf{u_n} - \mathbf{k_{no}k_{oo}^{-1}F_o} - \mathbf{F_n} \quad \text{(2.21)}$$

ili skraćeno

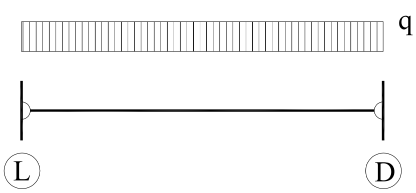
$$\mathbf{s_n^e} = \left(\mathbf{k_{nn}} + \hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{nn}}\right)\mathbf{u_n} - \hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{n}} - \mathbf{F_n} \quad \text{(2.22)}$$

odnosno

$$\mathbf{s_n^e} = \hat{\mathbf{k}}\,\mathbf{u_n} - \hat{\mathbf{F}} \quad \text{(2.23)}$$

Posljednja relacija (2.23) predstavlja kondenzirane jednadžbe ravnoteže konačnog elementa koje moramo rastegnuti na početno stanje tako da svaku pojedinu jednadžbu vratimo na poziciju veze koja nije otpuštena, dok će se na pozicijama otpuštenih veza javiti nul jednadžbe.

Na primjer, promotrimo štap opterećen jednolikim kontinuiranim opterećenjem kojem želimo s oba kraja osloboditi zaokret, tj. na desnom kraju želimo postaviti zglob (Crtež 5).



***Crtež 5** – Štap s oslobađanjem rotacije na oba kraja*

Prema postupku (2.17-2.23), prvo je potrebno napisati jednadžbu ravnoteže konačnog elementa:

$$\mathbf{s^e} = \left[\mathbf{k_{ij}^e}\right]\left\{\mathbf{u_i}\right\} - \left\{\mathbf{F_i^e}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{pu-1} \\ T_{pu-1} \\ M_{pu-1} \\ N_{pu-2} \\ T_{pu-2} \\ M_{pu-2} \end{bmatrix}$$

Kako su nam momenti na oba kraja poznati (M_1=M_2=0), u konkretnom slučaju (jednoliko raspodijeljeno opterećenje po cijelom štapu) matrica izgleda:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ 0 \\ N_2 \\ T_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{q \cdot \ell}{2} \\ \frac{q \cdot \ell^2}{12} \\ 0 \\ \frac{q \cdot \ell}{2} \\ -\frac{q \cdot \ell^2}{12} \end{bmatrix}$$

Presložimo matricu prema izrazu (2.18), 2. redak prebacimo u 5. redak i 2. stupac u 5. stupac:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_\mathbf{n}^\mathbf{e} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{nn}} & \mathbf{k}_{\mathbf{no}} \\ \mathbf{k}_{\mathbf{on}} & \mathbf{k}_{\mathbf{oo}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_\mathbf{n} \\ \mathbf{u}_\mathbf{o} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_\mathbf{n} \\ \mathbf{F}_\mathbf{o} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{q \cdot \ell}{2} \\ 0 \\ \frac{q \cdot \ell}{2} \\ \frac{q \cdot \ell^2}{12} \\ -\frac{q \cdot \ell^2}{12} \end{bmatrix}$$

Te izrazimo otpuštene pomake u funkciji neotpuštenih, prema (2.19)

$$\mathbf{u}_\mathbf{o} = \mathbf{k}_{\mathbf{oo}}^{-1} \left(\mathbf{F}_\mathbf{o} - \mathbf{k}_{\mathbf{on}} \, \mathbf{u}_\mathbf{n} \right) \quad ; \quad \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ \frac{2EI}{\ell} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} \frac{q \cdot \ell^2}{12} \\ -\frac{q \cdot \ell^2}{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\ell}{3EI} & -\frac{\ell}{6EI} \\ -\frac{\ell}{6EI} & \frac{\ell}{3EI} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \frac{q \cdot \ell^2}{12} \\ -\frac{q \cdot \ell^2}{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right)$$

Sile u neotpuštenim vezama dobivamo izražavamo preko grupe jednadžbi neotpuštenih veza kao:

$$\mathbf{s}_\mathbf{n}^\mathbf{e} = \mathbf{k}_\mathbf{nn}\mathbf{u}_\mathbf{n} - \mathbf{k}_\mathbf{no}\mathbf{u}_\mathbf{o} - \mathbf{F}_\mathbf{n}$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ N_2 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{6EI}{\ell^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{q\cdot\ell}{2} \\ 0 \\ \frac{q\cdot\ell}{2} \end{bmatrix}$$

Te nakon sređivanja:

$$\mathbf{s}_\mathbf{n}^\mathbf{e} = \mathbf{k}_\mathbf{nn}\mathbf{u}_\mathbf{n} + \mathbf{k}_\mathbf{no}\mathbf{k}_\mathbf{oo}^{-1}\mathbf{k}_\mathbf{on}\,\mathbf{u}_\mathbf{n} - \mathbf{k}_\mathbf{no}\mathbf{k}_\mathbf{oo}^{-1}\mathbf{F}_\mathbf{o} - \mathbf{F}_\mathbf{n}$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ N_2 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{6EI}{\ell^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{q\cdot\ell}{2} \\ 0 \\ \frac{q\cdot\ell}{2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{6EI}{\ell^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\ell}{3EI} & -\frac{\ell}{6EI} \\ -\frac{\ell}{6EI} & \frac{\ell}{3EI} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \frac{q\cdot\ell^2}{12} \\ -\frac{q\cdot\ell^2}{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{q\cdot\ell}{2} \\ 0 \\ \frac{q\cdot\ell}{2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{\ell} & -\frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \frac{q\cdot\ell^2}{12} \\ -\frac{q\cdot\ell^2}{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{q\cdot\ell}{2} \\ 0 \\ \frac{q\cdot\ell}{2} \end{bmatrix} =$$

Prema izrazima (2.22) i (2.23), može se napisati:

$$\mathbf{s}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{e}}=\left(\mathbf{k}_{\mathbf{nn}}+\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{nn}}\right)\mathbf{u}_{\mathbf{n}}-\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{n}}-\mathbf{F}_{\mathbf{n}} \quad ; \quad \mathbf{s}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{e}}=\hat{\mathbf{k}}\,\mathbf{u}_{\mathbf{n}}-\hat{\mathbf{F}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{\ell} & -\frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \frac{q\cdot\ell^2}{12} \\ -\frac{q\cdot\ell^2}{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{q\cdot\ell}{2} \\ 0 \\ \frac{q\cdot\ell}{2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{q\cdot\ell}{2} \\ 0 \\ \frac{q\cdot\ell}{2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{24EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{24EI}{\ell^3} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{24EI}{\ell^3} & 0 & \frac{24EI}{\ell^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{q\cdot\ell}{2} \\ 0 \\ \frac{q\cdot\ell}{2} \end{bmatrix}$$

Konačno, kondenziranu matricu krutosti potrebno je rastegnuti na početno (6×6) stanje. Svaka jednadžba vraća se na svoje izvorno mjesto, a na mjestima otpuštenih veza pojavljuju se nul-jednadžne.

$$\mathbf{s}^{\mathbf{e}}=\left[\mathbf{k}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{e}}\right]\left\{\mathbf{u}_{\mathbf{i}}\right\}-\left\{\mathbf{F}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{e}}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{24EI}{\ell^3} & 0 & 0 & -\frac{24EI}{\ell^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{24EI}{\ell^3} & 0 & 0 & \frac{24EI}{\ell^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{pu-1} \\ T_{pu-1} \\ 0 \\ N_{pu-2} \\ T_{pu-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Prilikom otpuštanja veza na krajevima elementa valja paziti da se ne otpusti preveliki broj veza. Otpuštanjem prevelikog broja veza (npr. otpuštanjem oba vertikalna pridržanja) element postaje kinematski lanac, a globalna matrica krutosti postaje singularna.

2.7 RAVNOTEŽA GLOBALNOG SUSTAVA

Ravnoteža globalnog sustava uspostavlja se slaganjem sila na rubovima konačnog elementa i sila upetosti u odgovarajućim čvorovima mreže konačnih elemenata. Prije toga potrebno je izvršiti preslikavanje krutosti i sila iz lokalnog u globalni sustav.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\mathbf{gl}}^{\mathbf{e}} &= \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{k}^{\mathbf{e}}\,\mathbf{T} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{gl}}^{\mathbf{e}} &= \mathbf{T}\,\mathbf{F}^{\mathbf{e}} \end{aligned} \qquad \text{.......} \quad (2.24)$$

Preslikavanje se vrši matricom transformacije (**T**), koja za ravninu ima oblik:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{.......} \quad (2.25)$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta dobivamo ravnotežu globalnog sustava u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} &\mathbf{K} = \sum_{e} \mathbf{k}_{\mathbf{gl}}^{\mathbf{e}} \quad ; \quad \mathbf{F} = \sum_{e} \mathbf{F}_{\mathbf{gl}}^{\mathbf{e}} \\ &\mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{F} \end{aligned} \qquad \text{.......} \quad (2.26)$$

gdje su **K** i **F** matrice krutosti i opterećenja, a **u** vektor globalnih pomaka.

Literatura

[1] A. Mihanović, P. Marović, J. Dvornik: ***"Nelinearni proračuni armirano betonskih konstrukcija***", DHGK, Zagreb, 1993.

[2] V. Jović: ***"Uvod u inženjersko numeričko modeliranje"***, Aquarius Engineering, Split, 1993.

[3] B. Gotovac, V. Kozulić, I. Čolak: ***"Uvod u numeričko modeliranje prostornih konstrukcija"***, Sveučilište u Mostaru, Mostar, 2001.

[4] M. Y. H. Bangash, ***„Concrete and Concrete Structures: Numerical Modeling and Applications"***, Elsever, London, 1989.

[5] J. S. Prezeminiecki, ***„Theory of Matrix Structural Analysis"***, McGrow-Hill, New York, 1968.

[6] M. Sekulović, ***„Metoda konačnih elemenata"***, Građevinska knjiga, Beograd, 1988.

[7] http://www.gradst.hr/katedre/konstr/zeljana/onk2/11_deformacija_ravnog_stapa%20_pri_savijanju.pdf

2.8 ISPIS IZVORNOG PROGRAMA U VISUAL BASICU ZA EXCEL

```
Sub stapni_sustavi()
'
' stapni_sustavi Macro
' Macro recorded 12.11.2009 by gf-harapin
'
Dim br_stapova As Integer
Dim br_cvorova As Integer
Dim br_geom As Integer
Dim br_mat As Integer
Dim str As String

Dim line As Integer

' --------------------------------------------------------
' Polja vezana za cvorove
' --------------------------------------------------------
Dim cvor_coord(1000, 2) As Double
Dim cvor_pridr(1000, 3) As Integer

' --------------------------------------------------------
' Polja vezana za stapove
' --------------------------------------------------------
Dim stap_cvor(300, 2) As Integer
Dim stap_mat(300) As Integer
Dim stap_geom(300) As Integer
Dim stap_duz(300) As Double
Dim stap_kut(300) As Double

' --------------------------------------------------------
' Polja vezana za materijal
' --------------------------------------------------------
Dim mat_kar(10, 2) As Double

' --------------------------------------------------------
' Polja vezana za geometriju
' --------------------------------------------------------
Dim geom_kar(10, 2) As Double

' --------------------------------------------------------
' Ucitaj osnovne podatke modela
' --------------------------------------------------------
br_stapova = Sheets("Ulazni podaci").Cells(2, 2)
br_cvorova = Sheets("Ulazni podaci").Cells(1, 2)
br_mat = Sheets("Ulazni podaci").Cells(4, 2)
br_geom = Sheets("Ulazni podaci").Cells(3, 2)

If (br_cvorova * 3 > 48) Then
    Response = MsgBox("Preveliki broj cvorova!", vbOKOnly, "Upozorenje")
    End
  End If
' --------------------------------------------------------
' Ucitaj podatke o cvorovima modela
' --------------------------------------------------------
line = 7
 For I = 1 To br_cvorova
  icvor = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 1)
  cvor_coord(icvor, 1) = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 2)
  cvor_coord(icvor, 2) = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 3)
  cvor_pridr(icvor, 1) = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 4)
  cvor_pridr(icvor, 2) = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 5)
  cvor_pridr(icvor, 3) = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 6)
  line = line + 1
Next I

' --------------------------------------------------------
' Ucitaj podatke o stapovima modela
' --------------------------------------------------------
line = line + 2
 For I = 1 To br_stapova
  istap = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 1)
  stap_cvor(istap, 1) = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 2)
  stap_cvor(istap, 2) = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 3)
  stap_mat(istap) = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 4)
  stap_geom(istap) = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 5)
  Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 6) = cvor_coord(stap_cvor(istap, 1), 1)
  Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 7) = cvor_coord(stap_cvor(istap, 1), 2)
  Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 8) = cvor_coord(stap_cvor(istap, 2), 1)
  Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 9) = cvor_coord(stap_cvor(istap, 2), 2)
  stap_duz(istap) = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 10)
  stap_kut(istap) = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 11)
  line = line + 1
Next I

' --------------------------------------------------------
' Ucitaj podatke o materijalima modela
' --------------------------------------------------------
line = line + 2
 For I = 1 To br_mat
```

```
  imat = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 1)
  mat_kar(imat, 1) = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 2)
  mat_kar(imat, 2) = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 3)
  line = line + 1
Next I

' ---------------------------------------------------------
' Ucitaj podatke o geometriji modela
' ---------------------------------------------------------
line = line + 2
 For I = 1 To br_geom
  imat = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 1)
  geom_kar(imat, 1) = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 4)
  geom_kar(imat, 2) = Sheets("Ulazni podaci").Cells(line, 5)
  line = line + 1
Next I


' ---------------------------------------------------------
' Formiraj matrice krutosti elemenata
' ---------------------------------------------------------
 Worksheets("El-kr").Activate
 Worksheets("El-kr").Range("A1:IV36000").Clear
 For istap = 1 To br_stapova
  line = (istap - 1) * 7 + 2
  stup = 1
    imat = stap_mat(istap)
    igeom = stap_geom(istap)
    E = mat_kar(imat, 1)
    A = geom_kar(igeom, 1)
    II = geom_kar(igeom, 2)
    L = stap_duz(istap)
    alfa = stap_kut(istap)

     For j = 1 To 6
       For k = 1 To 6
         Sheets("El-kr").Cells(line + j, stup + k) = 0
        Next k
      Next j

  Sheets("El-kr").Cells(line + 1, stup + 1) = E * A / L
  Sheets("El-kr").Cells(line + 1, stup + 4) = -E * A / L
  Sheets("El-kr").Cells(line + 4, stup + 1) = -E * A / L
  Sheets("El-kr").Cells(line + 4, stup + 4) = E * A / L

  Sheets("El-kr").Cells(line + 2, stup + 2) = 12 * E * II / (L * L * L)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 2, stup + 5) = -12 * E * II / (L * L * L)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 5, stup + 2) = -12 * E * II / (L * L * L)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 5, stup + 5) = 12 * E * II / (L * L * L)

  Sheets("El-kr").Cells(line + 2, stup + 3) = 6 * E * II / (L * L)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 2, stup + 6) = 6 * E * II / (L * L)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 3, stup + 2) = 6 * E * II / (L * L)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 6, stup + 2) = 6 * E * II / (L * L)

  Sheets("El-kr").Cells(line + 3, stup + 5) = -6 * E * II / (L * L)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 5, stup + 3) = -6 * E * II / (L * L)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 5, stup + 6) = -6 * E * II / (L * L)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 6, stup + 5) = -6 * E * II / (L * L)

  Sheets("El-kr").Cells(line + 3, stup + 3) = 4 * E * II / (L)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 3, stup + 6) = 2 * E * II / (L)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 6, stup + 3) = 2 * E * II / (L)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 6, stup + 6) = 4 * E * II / (L)

  Range(Cells(line + 1, stup + 1), Cells(line + 6, stup + 6)).Select
  Range(Cells(line + 1, stup + 1), Cells(line + 6, stup + 6)).BorderAround (6)
'
' ---------------------------------------------------------
' matrica transformacije
' ---------------------------------------------------------
  stup = stup + 7
     For j = 1 To 6
       For k = 1 To 6
         Sheets("El-kr").Cells(line + j, stup + k) = 0
        Next k
      Next j

  Sheets("El-kr").Cells(line + 1, stup + 1) = Cos(alfa)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 1, stup + 2) = Sin(alfa)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 2, stup + 1) = -Sin(alfa)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 2, stup + 2) = Cos(alfa)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 3, stup + 3) = 1
  Sheets("El-kr").Cells(line + 4, stup + 4) = Cos(alfa)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 4, stup + 5) = Sin(alfa)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 5, stup + 4) = -Sin(alfa)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 5, stup + 5) = Cos(alfa)
  Sheets("El-kr").Cells(line + 6, stup + 6) = 1

  Range(Cells(line + 1, stup + 1), Cells(line + 6, stup + 6)).Select
  Range(Cells(line + 1, stup + 1), Cells(line + 6, stup + 6)).BorderAround (6)
'
```

```
' ------------------------------------------------------
' Prebacivanje matrice u globalni koordinatni sustav
' ------------------------------------------------------
  stup = stup + 7
    Range(Cells(line + 1, stup + 1), Cells(line + 6, stup + 6)).Select
    Selection.FormulaArray = "=MMULT(TRANSPOSE(RC[-7]:R[5]C[-2]),MMULT(RC[-14]:R[5]C[-9],RC[-7]:R[5]C[-2]))"
    Range(Cells(line + 1, stup + 1), Cells(line + 6, stup + 6)).BorderAround (6)
Next istap
'
'
' ------------------------------------------------------
' Ponistavanje globalne matrice krutosti
' ------------------------------------------------------
 Worksheets("Gl-kr").Activate
 Worksheets("Gl-kr").Range("A1:IV36000").Clear
'  line = 1
'  stup = 1
'      For j = 1 To (br_cvorova * 3)
'       For k = 1 To (br_cvorova * 3)
'         Sheets("Gl-kr").Cells(line + j, stup + k) = 0
'        Next k
'      Next j

  Sheets("Gl-kr").Range(Cells(2, 2), Cells(1 + br_cvorova * 3, 1 + br_cvorova * 3)).Value = 0
'
' ------------------------------------------------------
' Slaganje elementnih matrica u globalnu matricu krutosti
' ------------------------------------------------------
For istap = 1 To br_stapova
'
' Prva podmatrica (gore lijevo)
  line = (istap - 1) * 7 + 2
  stup = 15
  c1 = stap_cvor(istap, 1)
  c2 = stap_cvor(istap, 2)
  line_g = (c1 - 1) * 3 + 1
  stup_g = (c1 - 1) * 3 + 1
      For j = 1 To 3
       For k = 1 To 3
         Sheets("Gl-kr").Cells(line_g + j, stup_g + k) = Sheets("Gl-kr").Cells(line_g + j, stup_g + k) + Sheets("El-
kr").Cells(line + j, stup + k)
        Next k
      Next j
'
' Druga podmatrica (gore desno)
  line = (istap - 1) * 7 + 2
  stup = 18
  c1 = stap_cvor(istap, 1)
  c2 = stap_cvor(istap, 2)
  line_g = (c1 - 1) * 3 + 1
  stup_g = (c2 - 1) * 3 + 1
      For j = 1 To 3
       For k = 1 To 3
         Sheets("Gl-kr").Cells(line_g + j, stup_g + k) = Sheets("Gl-kr").Cells(line_g + j, stup_g + k) + Sheets("El-
kr").Cells(line + j, stup + k)
        Next k
      Next j
'
' Treca podmatrica (dole lijevo)
  line = (istap - 1) * 7 + 5
  stup = 15
  c1 = stap_cvor(istap, 1)
  c2 = stap_cvor(istap, 2)
  line_g = (c2 - 1) * 3 + 1
  stup_g = (c1 - 1) * 3 + 1
      For j = 1 To 3
       For k = 1 To 3
         Sheets("Gl-kr").Cells(line_g + j, stup_g + k) = Sheets("Gl-kr").Cells(line_g + j, stup_g + k) + Sheets("El-
kr").Cells(line + j, stup + k)
        Next k
      Next j
'
' Cetvrta podmatrica (dole desno)
  line = (istap - 1) * 7 + 5
  stup = 18
  c1 = stap_cvor(istap, 1)
  c2 = stap_cvor(istap, 2)
  line_g = (c2 - 1) * 3 + 1
  stup_g = (c2 - 1) * 3 + 1
      For j = 1 To 3
       For k = 1 To 3
         Sheets("Gl-kr").Cells(line_g + j, stup_g + k) = Sheets("Gl-kr").Cells(line_g + j, stup_g + k) + Sheets("El-
kr").Cells(line + j, stup + k)
        Next k
      Next j

Next istap
Sheets("Gl-kr").Range(Cells(2, 2), Cells(1 + br_cvorova * 3, 1 + br_cvorova * 3)).BorderAround (6)

'
' ------------------------------------------------------
' Prepisivanje globalne matrice krutosti (prije uvrstenja RU)
```

```
' ------------------------------------------------------
  line = 1
  stup = 1
  line_g = (br_cvorova * 3) + 2
      For j = 1 To (br_cvorova * 3)
       For k = 1 To (br_cvorova * 3)
         Sheets("Gl-kr").Cells(line_g + j, stup + k) = Sheets("Gl-kr").Cells(line + j, stup + k)
        Next k
      Next j

Sheets("Gl-kr").Range(Cells(line_g + 1, 2), Cells(line_g + br_cvorova * 3, 1 + br_cvorova * 3)).BorderAround (6)
'
' ------------------------------------------------------
' Uvrstavanje Rubnih Uvjeta
' ------------------------------------------------------
    For icvor = 1 To br_cvorova
    For iprd = 1 To 3
    If (cvor_pridr(icvor, iprd)) = 1 Then
      For j = 1 To (br_cvorova * 3)
         Sheets("Gl-kr").Cells(line_g + (icvor - 1) * 3 + iprd, j + 1) = 0
         Sheets("Gl-kr").Cells(line_g + j, (icvor - 1) * 3 + iprd + 1) = 0
      Next j
     Sheets("Gl-kr").Cells(line_g + (icvor - 1) * 3 + iprd, (icvor - 1) * 3 + iprd + 1) = 1
    End If
  Next iprd
 Next icvor
'
' ------------------------------------------------------
' Izracunavanje K-1
' ------------------------------------------------------
'
    line_g = (br_cvorova * 3) * 2 + 3
    Range(Cells(line_g + 1, 2), Cells(line_g + br_cvorova * 3, 1 + br_cvorova * 3)).Select
    str = "=MINVERSE(R[" + CStr(-br_cvorova * 3 - 1) + "]C:R[" + CStr(-2) + "]C[" + CStr(br_cvorova * 3 - 1) + "])"
    Selection.FormulaArray = str

'    Selection.FormulaArray = "=MINVERSE(R[-13]C:R[-2]C[11])"
    Selection.BorderAround (6)
'
' ------------------------------------------------------
' Postavi sve sile u cvorovima na 0.00
' ------------------------------------------------------
    line_g = (br_cvorova * 3) * 2 + 3
    stup_g = (br_cvorova * 3) + 3
    For icvor = 1 To br_cvorova
    For j = 1 To 3
      ipos = (icvor - 1) * 3 + j
      Sheets("Gl-kr").Cells(line_g + ipos, stup_g) = 0
       If (j = 1) Then str = "Fx-" + CStr(icvor)
       If (j = 2) Then str = "Fy-" + CStr(icvor)
       If (j = 3) Then str = "M-" + CStr(icvor)
      Sheets("Gl-kr").Cells(line_g + ipos, stup_g - 1) = str
      Next j
    Next icvor
    Range(Cells(line_g + 1, stup_g), Cells(line_g + br_cvorova * 3, stup_g)).Select
    Selection.BorderAround (6)
'
' ------------------------------------------------------
' Izracunaj pomake
' ------------------------------------------------------
    line_g = (br_cvorova * 3) * 2 + 3
    Range(Cells(line_g + 1, stup_g + 2), Cells(line_g + br_cvorova * 3, stup_g + 2)).Select
    str = "=MMULT(RC[" + CStr(-br_cvorova * 3 - 3) + "]:R[" + CStr(br_cvorova * 3 - 1) + "]C[" + CStr(-4) + "],RC[" + CStr(-
2) + "]:R[" + CStr(br_cvorova * 3 - 1) + "]C[" + CStr(-2) + "])"
    Selection.FormulaArray = str
    Selection.BorderAround (6)

End Sub
```

NAPOMENA: Konkretni program vezan je za Excel ver. 2003. U nekim drugim verzijama moguće je da program nema punu funkcionalnost. Također, program je vezan za konkretna imena Worksheet-ova i konkretne položaje ulaznih podataka.

2.9 ZADACI ZA SAMOSTALNI RAD

Jednostavnim izmjenama gore prikazanog programa uradi:

1. Proširi program tako da izračunava sile na krajevima štapova

   Uputa: Nakon izračuna pomaka potrebno je pomake vratiti u lokalni koordinatni sustav. To se postiže umnoškom:

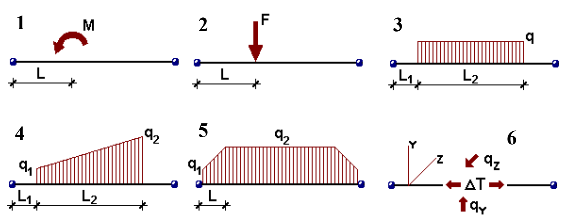
$$\mathbf{u}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{lok}} = \mathbf{T}\,\mathbf{u}_{\mathbf{glob}}$$

   Sile se izračunavaju preko izraza:

$$\mathbf{s}^{e} = \mathbf{k}^{e}\,\mathbf{u} - \mathbf{F}^{e}$$

2. Uključi mogućnost zadavanja opterećenja po štapu

   Uputa: U Sheet-u „Ulazni podaci“ dodati jedan redak s mogućnošću upisa 6 podataka:



   1. podatak: broj štapa na koji se zadaje opt.
   2. tip opterećenja: prema skici
   3. podatak: M, F, q ili q_1
   4. podatak: q_2
   5. podatak: L ili L_1
   6. podatak: L_2

   Predvidjeti mogućnost upisa prva četiri slučaja opterećenja (koncentrirani moment, koncentrirana sila, kontinuirano opterećenje po cijeloj gredi i trapezno opterećenje).

$$\mathbf{F}^{e} = \int \mathbf{H}^{T}\,\mathbf{f}\,dx \qquad ; \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_4 & 0 & h_5 & h_6 \end{bmatrix}$$

3. Uključi mogućnost zadavanja opterećenja na dijelu štapa (numerička integracija)

   Uputa: Proširiti zadatak 2 na način da se mogu zadati svi slučajevi opterećenja, a vektor sila upetosti se izračunava numeričkom integracijom Gaussovom formulom. Koristiti lit. [2], str. 99-101 ili lit. [6], str. 163-166.

4. Proširi program tako da izračunava inverznu matricu

   Uputa: Uz matricu koju je potrebno invertirati dopiše se jedinična matrica, te se Gauss-ovom eliminacijom osnovna matrica pretvori u jediničnu. Sve operacije se pri tom rade i na jediničnoj matrici koja u konačnici postaje inverzna matrica osnovne matrice.

5. Uključi mogućnost zadavanja otpuštanja (zglobova) na štapu

   Uputa: U Sheet-u „Ulazni podaci“ proširiti redak upisa štapova s mogućnošću upisa dodatna 2 podatka – indeks otpuštenosti momenta na krajevima štapa (npr. 0 – neotpušteno, 1-otpušteno)

   Izračunati matrice krutosti u slučaju kada je otpušten moment u 1. čvoru i kada je otpušten moment u 2. čvoru. Matrice krutosti u slučaju kada je otpušten moment u oba čvora nalazi se na str. 14.

   Proširiti program da prepoznaje zadani slučaj i koristi korektnu matricu krutosti.