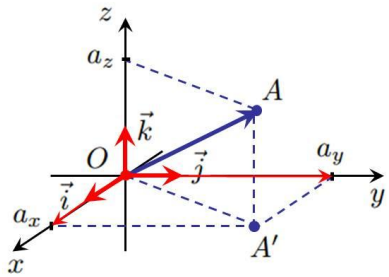
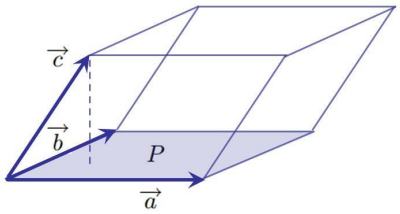
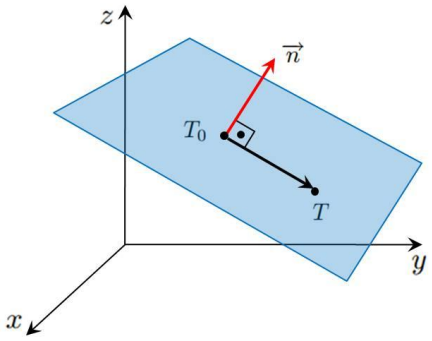
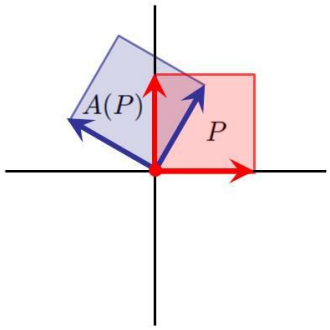
Analitička geometrija i linearna algebra
- 2016/17 -









Jelena Sedlar

Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu

Sadržaj

1 Vektorska algebra **1**

1.1 Definicija vektora . . . 1
1.2 Zbrajanje vektora . . . 3
1.3 Množenje vektora skalarom . . . 5
1.4 Koordinatizacija prostora . . . 6
1.4.1 Koordinatizacija ravnine . . . 6
1.4.2 Koordinatizacija prostora . . . 7
1.5 Izračunavanje u koordinatiziranom prostoru . . . 8
1.5.1 Zbrajanje i množenje sa skalarom . . . 8
1.5.2 Vektor $\overrightarrow{AB}$ . . . 9
1.5.3 Duljina vektora . . . 9
1.5.4 Jedinični vektor . . . 10
1.5.5 Prikloni kutevi . . . 10
1.6 Množenje vektora . . . 12
1.6.1 Skalarni produkt vektora . . . 12
1.6.2 Vektorski produkt vektora . . . 14
1.6.3 Mješoviti produkt vektora . . . 16
1.7 Linearna (ne)zavisnost vektora . . . 17

2 Pravci i ravnine u prostoru **21**

2.1 Ravnina . . . 21
2.1.1 Osnovni oblik jednadžbe . . . 21
2.1.2 Vektorski oblik jednadžbe . . . 21
2.1.3 Skalarni oblik jednadžbe . . . 22
2.1.4 Opći oblik jednadžbe . . . 22
2.1.5 Jednadžba ravnine kroz tri točke . . . 24
2.1.6 Segmentni oblik jednadžbe ravnine . . . 24
2.2 Pravac . . . 25
2.2.1 Osnovni oblik jednadžbe pravca . . . 25
2.2.2 Vektorski oblik jednadžbe . . . 25
2.2.3 Skalarni oblik jednadžbe . . . 26
2.2.4 Kanonska jednadžba pravca . . . 26
2.2.5 Jednadžba pravca kroz dvije točke . . . 27
2.2.6 Pravac kao presjek dviju ravnina . . . 27

2.3 Kutevi . . . 27
2.3.1 Dva pravca . . . 27
2.3.2 Dvije ravnine . . . 28
2.3.3 Pravac i ravnina . . . 28
2.4 Udaljenosti . . . 29
2.4.1 Dvije točke . . . 29
2.4.2 Točka i pravac . . . 29
2.4.3 Točka i ravnina . . . 30
2.4.4 Dva pravca . . . 30
2.4.5 Pravac i ravnina . . . 31
2.4.6 Dvije ravnine . . . 32

3 Matrice **35**
3.1 Osnovni pojmovi . . . 35
3.1.1 Definicija matrice . . . 35
3.1.2 Neke matrice specijalnog oblika . . . 36
3.1.3 Matrica kao skup vektora . . . 38
3.2 Računske operacije s matricama . . . 38
3.2.1 Zbrajanje matrica . . . 38
3.2.2 Množenje matrice sa skalarom . . . 39
3.2.3 Množenje matrica . . . 39
3.3 Regularne matrice . . . 41
3.4 Elementarne transformacije . . . 41
3.5 Determinante . . . 42
3.5.1 Definicija determinante . . . 42
3.5.2 Svojstva determinanti . . . 43
3.6 Rang matrice . . . 44
3.6.1 Definicija ranga . . . 44
3.6.2 Rang matrice u reduciranoj formi . . . 45
3.6.3 Rang općenite matrice . . . 46
3.6.4 Elementarne matrice . . . 47
3.7 Inverzna matrica . . . 47
3.7.1 Determinanta i inverzna matrica . . . 48
3.7.2 Rang i inverzna matrica . . . 48
3.8 Linearna (ne)zavisnost matrica . . . 50
3.8.1 Definicija linearne nezavisnosti . . . 50
3.8.2 Linearna (ne)zavisnost redaka ili stupaca u matrici . . . 50

4 Sustavi linearnih jednadžbi **53**
4.1 Osnovni pojmovi . . . 53
4.2 Rješavanje općenitog sustava . . . 56
4.3 Regularni kvadratni sustavi . . . 59
4.3.1 Rješavanje matrične jednadžbe . . . 59
4.3.2 Cramerovo pravilo . . . 60

5 Vektorski prostori **61**
5.1 Definicija vektorskog prostora . . . 61
5.2 Linearno nezavisni vektori . . . 62
5.3 Vektori generatori . . . 63
5.4 Baze vektorskih prostora . . . 65
5.5 Promjena baze . . . 67

6 Linearni operatori **69**
6.1 Definicija linearnog operatora . . . 69
6.2 Prikaz linearnog operatora matricom . . . 69
6.3 Promjena baze i prikaz operatora . . . 72
6.4 Algebra operatora . . . 73
6.5 Primjeri operatora u ravnini i prostoru . . . 75

7 Svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti **79**
7.1 Definicija i osnovna svojstva . . . 79
7.2 Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom . . . 80
7.3 Određivanje svojstvenih vektora i svojstvenih vrijednosti . . . 81
7.4 Dijagonalizacija operatora . . . 81
7.5 Skalarni produkt . . . 82
7.6 Simetrične matrice . . . 84

8 Krivulje i plohe drugog reda **87**
8.1 Kvadratne forme . . . 87
8.2 Polinomi više varijabli . . . 89
8.3 Krivulje i plohe drugog reda . . . 89
8.4 Klasifikacija krivulja drugog reda . . . 91
8.5 Klasifikacija ploha drugog reda . . . 92

Uvod

Ova skripta je nastala kao nastavni tekst uz predavanja iz predmeta Analitička geometrija i linearna algebra preddiplomskog sveučilišnog studija geodezije i geoinformatike na Fakultetu građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu. Obrađena su poglavlja Vektorska algebra, Pravci i ravnine u prostoru, Matrice, Sustavi linearnih jednadžbi, Vektorski prostori, Linearni operatori, Svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti, Krivulje i plohe 2. reda. Prva četiri poglavlja su standardan sadržaj koji se predaje na većini tehničkih i prirodoslovnih fakulteta, pa postoje brojne knjige i skripte koje pokrivaju taj sadržaj. Preostala četiri poglavlja su sadržaj koji se nešto rjeđe predaje po fakultetima, pa je literatura na hrvatskom jeziku koja taj dio sadržaja pokriva nešto rjeđa. U zadnjem poglavlju navedene su reference za literaturu koja je najviše utjecala na sadržaj ovih nastavnih materijala, uglavnom zato što je ili dostupna na internetu ([3], [4], [5], [6], [7]) ili mi je bila dostupna u tiskanom izdanju ([1], [2]).

Ovi nastavni materijali su prilagođeni održavanju predavanja u 30 nastavnih sati, imaju 95 stranica nastavnog sadržaja i ilustrirani su sa preko 100 slika. Uz nastavne materijale izrađene su prezentacije sa dinamičkim slajdovima i animiranim ilustracijama koje su korisno nastavno pomagalo. U svom prvotnom obliku materijali su nastali za potrebe nastave akademske godine 2010/11 kad je pokrenut studij geodezije i geoinformatike na Fakultetu građevinarstva, arhitekture i geodezije, koristili su se u nastavi svih sljedećih godina, a svake godine su bili pomalo različiti kao rezultat nastojanja da ih što više približim studentima.

Konačno, na izradu ovih nastavnih materijala te ilustracija i prezentacija koje ga prate utrošila sam brojne sate, stoga ih smatram svojim vlasništvom i zadržavam sva prava nad njima.

Jelena Sedlar

Poglavlje 1

Vektorska algebra

1.1 Definicija vektora

Vektor je pojam koji se definira u prostoru, uz napomenu da se u matematici 'prostorom' jednako naziva i ravnina i prostor (jedino što je ravnina dvodimenzionalna, a prostor trodimenzionalan). U matematici su razvijene brojne teorije o brojnim vrstama prostora, no mi ćemo se ovdje baviti najuobičajenijim prostorom koji se naziva euklidski, i podrazumijevat ćemo da je intuitivno jasan. Dvodimenzionalni euklidski prostor (tj. ravninu) označavat ćemo s E^2, dok ćemo trodimenzionalni euklidski prostor (tj. baš prostor) označavati s E^3. Točke iz prostora označavat ćemo s velikim tiskanim slovima $A, B, C, P, Q, \ldots$ Dužinu s krajevima u točkama A i B označavat ćemo s $\overline{AB}$, udaljenost točaka A i B označavat ćemo s $d(A, B)$ ili još s $|AB|$. To je ujedno i duljina dužine $\overline{AB}$.

Motivacija za uvođenje pojma vektor je to što uočavamo da neke fizikalne pojave imaju samo intenzitet, pa se mogu dobro opisati brojem, dok neke druge fizikalne pojave imaju i intenzitet i smjer, pa se ne mogu dobro opisati samo brojem. Neformalnije rečeno, do pojma vektor dolazimo tako da definiramo pojam usmjerene dužine, zatim uvedemo relaciju sličnosti usmjerenih dužina (koja dijeli usmjerene dužine u klase), te konačno definiramo vektor kao klasu sličnih usmjerenih dužina. Razlog zašto tako činimo je taj da ne želimo da nam vektor ovisi o položaju u prostoru. Provedimo sada sve ovo formalnim matematičkim definicijama.

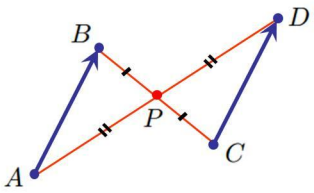
Definicija 1.1 Usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ *je dužina kod koje je par krajnjih točaka uređen, pa se točka* A *naziva početkom usmjerene dužine, a točka* B *krajem.*

Duljina $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ definirana je kao udaljenost točaka A i B.

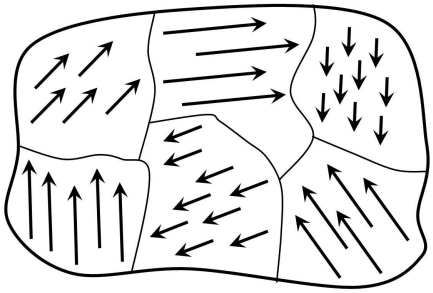
Definicija 1.2 *Usmjerene dužine* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{CD}$ *su slične (pišemo* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$*), ako dužine* $\overline{AD}$ *i* $\overline{BC}$ *imaju isto polovište.*

Relaciju sličnosti usmjerenih dužina smo mogli neformalnije opisati tako da kažemo da su dvije usmjerene dužine slične, ako se jedna iz druge mogu dobiti translacijom po prostoru. Primjer dviju usmjerenih dužina koje su slične prikazan je na Slici 1.1.

Relacija sličnosti dijeli usmjerene dužine u klase sličnih usmjerenih dužina (vidi Sliku 1.2).



Slika 1.1: Dvije slične usmjerene dužine.



Slika 1.2: Klase sličnih usmjerenih dužina.

Definicija 1.3 *Vektor je klasa sličnih usmjerenih dužina.*

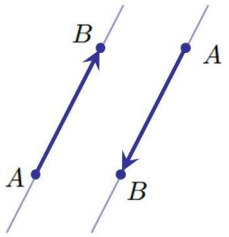
Vektore ćemo označavati sa $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \ldots$. Svaka usmjerena dužina u klasi koja čini vektor naziva se predstavnikom tog vektora. Vektor se često u zapisu poistovjećuje sa nekom usmjerenom dužinom koja mu je predstavnik, pa tako pišemo primjerice $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{PQ}$, iako to nije posve korektno jer vektor i usmjerena dužina nisu isti pojam.

Uočimo da je vektor jednoznačno određen ako mu je poznata:

- **duljina**, tj. udaljenost njegovih krajnjih točaka,
- **smjer**, tj. pravac na kojem leži neka usmjerena dužina koja je predstavnik vektora (ovaj pravac se još naziva i pravac nositelj),
- **orijentacija**, tj. poredak krajnjih točaka usmjerene dužine na pravcu nositelju (za vektore $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$ s istim smjerom kažemo da su iste orijentacije ako točke A i B leže s iste strane točke O na pravcu, a u suprotnom kažemo da su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ suprotne orijentacije).

Primjer dva vektora iste duljine i smjera, ali suprotne orijentacije prikazan je na Slici 1.3. Kažemo da su vektori kolinearni ako imaju isti smjer (tj. leže na istom ili paralelnim pravcima), dok im duljina i orijentacija mogu biti različiti.

Uvodimo još neke pojmove koji su vezani za pojam vektora.



Slika 1.3: Dva vektora iste duljine i smjera, ali suprotne orijentacije.

Definicija 1.4 Nul-vektor *je vektor koji ima početak i kraj u istoj točki.*

Nul-vektor označavamo s $\overrightarrow{0}$, a njegovi predstavnici su sve usmjerene dužine oblika $\overrightarrow{PP}$. Uočimo da nulvektor $\overrightarrow{0}$ ima duljinu nula, dok smjer i orijentaciju nul-vektor nema.

Definicija 1.5 *Neka je* $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Jedinični vektor $\overrightarrow{a}_0$ *vektora* $\overrightarrow{a}$ *je vektor koji ima isti smjer i orijentaciju kao i vektor* $\overrightarrow{a}$*, ali je duljine* 1.

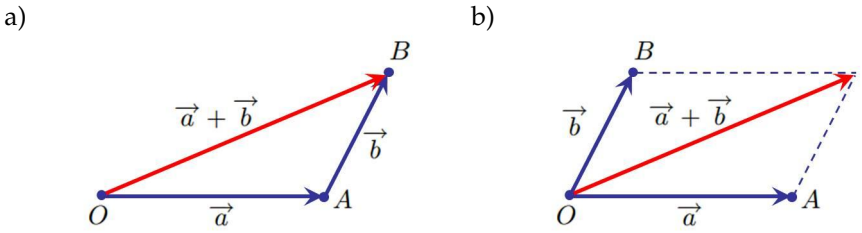
Na kraju, uvedimo još i pojam kuta među vektorima.

Definicija 1.6 Kut *između vektora je kut između njihovih predstavnika.*

1.2 Zbrajanje vektora

Definicija 1.7 *Neka su* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$ *i* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AB}$ *vektori.* Zbroj *vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *je vektor kojeg označavamo s* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$*, a koji je definiran sa* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$.

Ovakav način zbrajanja vektora naziva se *pravilo trokuta*. Vektori se mogu zbrajati i po pravilu paralelograma. Ova pravila zbrajanja ilustrirana su Slikom 1.4.



Slika 1.4: Zbrajanje vektora: a) pravilo trokuta, b) pravilo paralelograma.

Zadatak 1.8 *Skiciraj neke vektore* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *različitog smjera i duljine. Odredi grafički vektor* $\vec{a}+\vec{b}$ *po: a) pravilu trokuta, b) pravilu paralelograma!*

Zbrajanje vektora ima sljedeća svojstva:

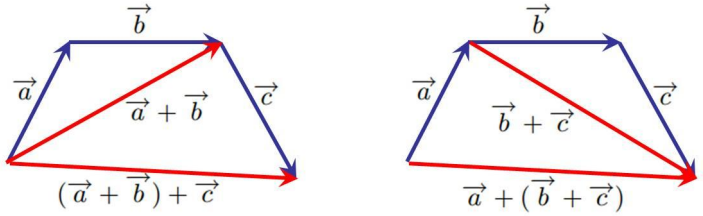
Z1) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (asocijativnost),

Z2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (komutativnost),

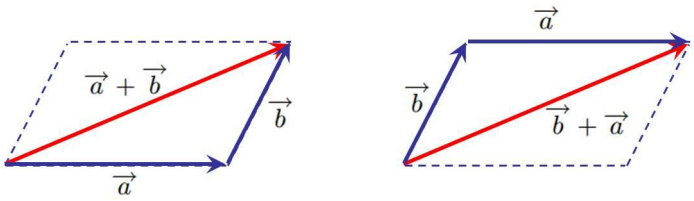
Z3) za svaki vektor $\vec{a}$ vrijedi $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ (postojanje neutralnog elementa),

Z4) za svaki vektor $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$ postoji njemu *suprotan vektor* $-\vec{a}=\overrightarrow{QP}$ takav da je $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (postojanje suprotnog elementa).

Svojstvo asocijativnosti ilustrirano je Slikom 1.5, dok je svojstvo komutativnosti ilustrirano Slikom 1.6. Svojstva postojanja neutralnog i suprotnog elementa očito vrijede po definiciji zbrajanja vektora.

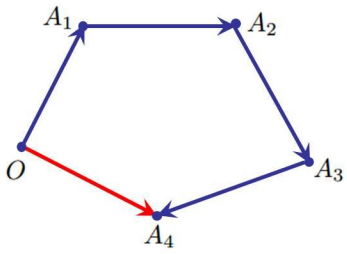


Slika 1.5: Svojstvo asocijativnosti zbrajanja vektora.



Slika 1.6: Svojstvo komutativnosti zbrajanja vektora.

Ukoliko želimo zbrojiti više od dva trokuta, onda ih zbrajamo po pravilu mnogokuta. Preciznije, ako su zadani vektori $\vec{a}_1=\overrightarrow{OA_1}$, $\vec{a}_2=\overrightarrow{A_1A_2},\ldots,\vec{a}_n=\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$, tada je $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n=\overrightarrow{OA_n}$. Pravilo mnogokuta slijedi iz pravila trokuta i asocijativnosti zbrajanja, a ilustrirano je Slikom 1.7.



Slika 1.7: Pravilo mnogokuta.

Zadatak 1.9 *Skiciraj neke vektore* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$ *različitog smjera i duljine. Odredi grafički vektor* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

1.3 Množenje vektora skalarom

Rezultat množenja vektora i skalara će biti vektor. Da bismo dobro definirali koji je to vektor, moramo mu definirati duljinu, smjer i orijentaciju jer vektor je jednoznačno određen tek kad su poznata sva ta tri pojma.

Definicija 1.10 *Neka je* $\overrightarrow{a}$ *vektor, a* $\lambda \in \mathbb{R}$ *skalar. Umnožak vektora* $\overrightarrow{a}$ *i skalara* λ *je vektor kojeg označavamo* $\lambda\overrightarrow{a}$, *a koji je definiran sa*

- $\lambda\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *ako je* $\lambda = 0$ *ili* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

U suprotnom vektor $\lambda\overrightarrow{a}$ *ima:*

- *duljinu jednaku duljini vektora* $\overrightarrow{a}$ *pomnoženoj s* $|\lambda|$,
- *smjer jednak smjeru vektora* $\overrightarrow{a}$,
- *orijentaciju jednaku orijentaciji vektora* $\overrightarrow{a}$ *ako je* $\lambda > 0$, *a suprotnu orijentaciji vektora* $\overrightarrow{a}$ *ako je* $\lambda < 0$.

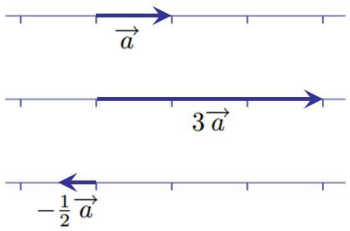
Ova definicija ilustrirana je Slikom 1.8. Uočimo da je vektor $\overrightarrow{b}$ kolinearan vektoru $\overrightarrow{a}$ ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$.

Zadatak 1.11 *Skiciraj neki vektor* $\overrightarrow{a}$. *Odredi grafički vektor: a)* $4\overrightarrow{a}$, *b)* $-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}$, *c)* $-\frac{3}{2}\overrightarrow{a}$.

Zadatak 1.12 *Skiciraj neke vektore* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *različitog smjera. Odredi grafički vektor: a)* $2\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$, *b)* $\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$.

Zadatak 1.13 *Skiciraj neke vektore* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$ *različitog smjera. Odredi grafički vektor* $\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{c}$.

Množenje vektora skalarom ima sljedeća svojstva:



Slika 1.8: Vektori $\overrightarrow{a}$, $3\overrightarrow{a}$ i $-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}$.

M1) $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$ (distributivnost prema zbrajanju u V^3),

M2) $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$ (distributivnost prema zbrajanju u $\mathbb{R}$),

M3) $(\lambda\mu)\overrightarrow{a} = \lambda(\mu\overrightarrow{a})$ (kompatibilnost množenja),

M4) $0\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$,

M5) $1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ (netrivijalnost množenja).

1.4 Koordinatizacija prostora

Skup ravninskih vektora zajedno s operacijama zbrajanja vektora i množenja vektora sa skalarom čini vektorski prostor kojeg označavamo s V^2. Skup prostornih vektora zajedno s operacijama zbrajanja vektora i množenja vektora sa skalarom čini vektorski prostor kojeg označavamo s V^3. Obzirom da je operacije s vektorima puno zgodnije provoditi računski, nego grafički, u prostore uvodimo koordinatni sustav koji nam omogućuje prikaz vektora brojevima i provođenje računskih operacija s vektorima računajući s brojevima.

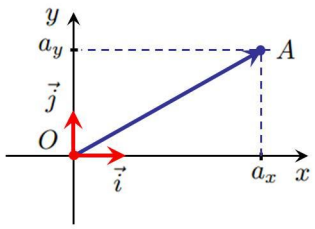
1.4.1 Koordinatizacija ravnine

U ravnini odaberemo točku O za ishodište. Zatim odaberemo dva međusobno okomita pravca koji se sijeku u točki O. Na jednom od tih pravaca odaberemo točku I, a na drugom točku J, tako da je $\left|\overrightarrow{OI}\right| = \left|\overrightarrow{OJ}\right| = 1$. Točke I i J biramo tako da točka I rotiranjem za kut od $\frac{\pi}{2}$ oko ishodišta u pozitivnom smjeru prelazi u točku J. Uvedemo oznake $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, pa je time definiran *desni pravokutni (ortogonalni) koordinatni sustav* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ u ravnini. Pravac kroz ishodište na kojem leži vektor $\vec{i}$ zovemo $x-$os ili *apscisa*, a na kojem leži vektor $\vec{j}$ zovemo $y-$os ili *ordinata*.

Neka je $\overrightarrow{a}$ neki ravninski vektor, kojeg prestavljamo usmjerenom dužinom $\overrightarrow{OA}$ koja ima početak u ishodištu koordinatnog sustava $O(0,0)$, a kraj u točki $A(a_x, a_y)$. Uočimo da po pravilu paralelograma vrijedi

$$\overrightarrow{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}.$$

Uočimo da su koordinate točke A i skalarene komponente vektora $\overrightarrow{a}$ iste, u suštini se radi o uređenom paru brojeva, pa ponekad govorimo i o koordinatama vektora $\overrightarrow{a}$ i pišemo $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$. Vektor $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$ se naziva radij-vektor točke A. Ova konstrukcija ilustrirana je Slikom 1.9.



Slika 1.9: Koordinatizacija ravnine.

1.4.2 Koordinatizacija prostora

U prostoru odaberemo točku O za ishodište. Zatim odaberemo tri međusobno okomita pravca koji se sijeku u točki O. Na jednom od tih pravaca odaberemo točku I, na drugom točku J, a na trećem točku K, tako da vektori $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ i $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ budu jedinične duljine, međusobno okomiti i da čine desnu trojku vektora (pravilo desne ruke). time definiran *desni pravokutni (ortogonalni) koordinatni sustav* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ u prostoru. Pravac kroz ishodište na kojem leži vektor $\vec{i}$ zovemo $x-$os ili *apscisa*, na kojem leži vektor $\vec{j}$ zovemo $y-$os ili *ordinata*, a na kojem leži vektor $\vec{k}$ zovemo $z-$os ili *aplikata*.

Neka je $\overrightarrow{a}$ neki prostorni vektor, kojeg prestavljamo usmjerenom dužinom $\overrightarrow{OA}$ koja ima početak u ishodištu koordinatnog sustava $O(0,0,0)$, a kraj u točki $A(a_x, a_y, a_z)$. Uočimo da po pravilu paralelograma vrijedi

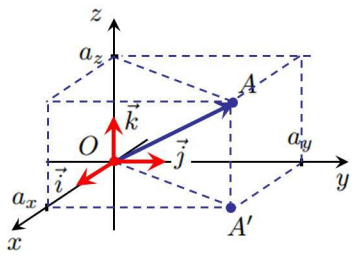
$$\overrightarrow{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Slično kao i kod ravninskih vektora, vidimo da su koordinate točke A i skalarene komponente vektora $\overrightarrow{a}$ iste, u suštini se radi o uređenoj trojski brojeva, pa ponekad govorimo i o koordinatama vektora $\overrightarrow{a}$ i pišemo $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Vektor $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$ se naziva radij-vektor točke A. Ova konstrukcija ilustrirana je Slikom 1.10.

Zadatak 1.14 *Gdje u prostornom koordinatnom sustavu leže točke:*

a) $T(2,0,0)$, $T(-1,0,0)$, $T(0,3,0)$, $T(0,0,2)$;
b) $T(2,1,0)$, $T(1,-2,0)$, $T(1,0,3)$, $T(0,1,2)$;
c) $T(1,2,3)$, $T(2,-1,1)$.

Zadatak 1.15 *Zadana je prostorna točka A sa: a) $A(1,3,-1)$, b) $A(0,2,3)$. Napiši radij vektor $\overrightarrow{a}$ točke A.*



Slika 1.10: Koordinatizacija prostora.

Zadatak 1.16 *Zadan je vektor* $\overrightarrow{a}$ *sa: a)* $\overrightarrow{a} = 2\vec{i} + \vec{k}$*, b)* $\overrightarrow{a} = \vec{j} - \vec{k}$*. Napiši koordinate točke A čiji je to radij vektor.*

1.5 Izračunavanje u koordinatiziranom prostoru

Dosad smo geometrijski definirali nekoliko operacija s vekotrima, a sada kad smo koordinatizirali prostor želimo pronaći formule za računanje tih operacija s koordinatiziranim vektorima.

1.5.1 Zbrajanje i množenje sa skalarom

Propozicija 1.17 *Neka su* $\overrightarrow{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ *i* $\overrightarrow{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ *dva vektora u ravnini, a* $\lambda \in \mathbb{R}$ *skalar. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j}, \\ \lambda\overrightarrow{a} &= (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j}. \end{aligned}$$

Propozicija 1.18 *Neka su* $\overrightarrow{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ *i* $\overrightarrow{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ *dva vektora u prostoru, a* $\lambda \in \mathbb{R}$ *skalar. Tada vrijedi*

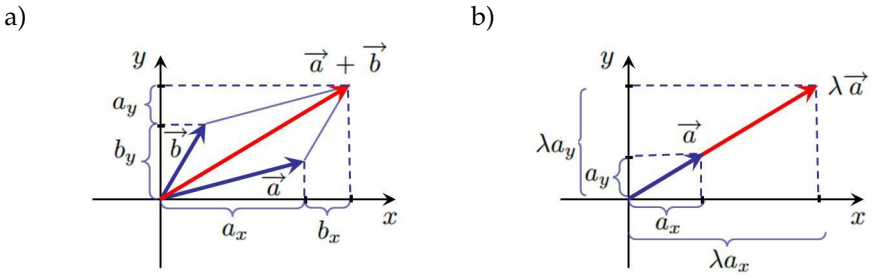
$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}, \\ \lambda\overrightarrow{a} &= (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k}. \end{aligned}$$

Obrazloženje zašto vrijede ove formule u ravninskom slučaju ilustrirano je Slikom 1.11, dok je za prostorni slučaj obrazloženje analogno.

Zadatak 1.19 *Zadani su vektori*

$$\overrightarrow{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad \overrightarrow{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Odredi vektore $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $2\overrightarrow{a}$, $-\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$.



Slika 1.11: Formula za: a) zbrajanje vektora, b) množenje vektora skalarom u koordinatiziranoj ravnini.

1.5.2 Vektor $\overrightarrow{AB}$

Za vektor koji ima početak u ishodištu, a kraj u nekoj točki A, lako izračunamo skalarne komponente (jednake su koordinatama točke A). No, sada ćemo izreći formulu za izračunavanje skalarnih komponenti vektora koji je predstavljen usmjerenom dužinom $\overrightarrow{AB}$ koja ne počinje u ishodištu. Naime, uočimo da vrijedi

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB},$$

pa je

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Uvrštavanjem koordinatiziranih radij vektora točke B i A u ovu formulu, dobivamo sljedeće formule.

Propozicija 1.20 *Neka su $A(a_x, a_y)$ i $B(b_x, b_y)$ proizvoljne točke ravnine. Tada je*

$$\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x)\vec{i} + (b_y - a_y)\vec{j}.$$

Propozicija 1.21 *Neka su $A(a_x, a_y, a_z)$ i $B(b_x, b_y, b_z)$ proizvoljne točke u prostoru. Tada vrijedi*

$$\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x)\vec{i} + (b_y - a_y)\vec{j} + (b_z - a_z)\vec{k}.$$

Zadatak 1.22 *Zadane su točke A i B sa: a) $A(1,2,3)$ i $B(2,0,1)$, b) $A(2,-1,3)$ i $B(-1,3,3)$. Odredi vektor $\overrightarrow{AB}$.*

Zadatak 1.23 *Odredi koordinate točke B ako je $A(1,2,-1)$ i $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.*

1.5.3 Duljina vektora

Propozicija 1.24 *Neka je $\overrightarrow{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ vektor u ravnini. Tada je*

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Propozicija 1.25 *Neka je* $\overrightarrow{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ *vektor u prostoru. Tada je*

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Uočimo da formula za ravninski slučaj slijedi iz Pitagorinog poučka, jer je duljina vektora $\overrightarrow{a}$ duljina hipotenuze u pravokutnom trokutu kojemu su katete dugačke a_x i a_y (vidi Sliku 1.9). Za prostorni slučaj tvrdnja slijedi iz dvostruke primjene pitagorinog poučka, jer je duljina vektora $\overrightarrow{a}$ duljina dijagonale u kvadru kojemu su tri različita brida dugačka a_x, a_y i a_z (vidi Sliku 1.10).

1.5.4 Jedinični vektor

Najprije uočimo da iz definicije množenja vektora sa skalarom vektor $\frac{1}{|\overrightarrow{a}|} \cdot \overrightarrow{a}$ ima isti smjer i orijentaciju kao vektor $\overrightarrow{a}$, a duljina tog vektora je

$$\left| \frac{1}{|\overrightarrow{a}|} \cdot \overrightarrow{a} \right| = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|} \cdot |\overrightarrow{a}| = 1.$$

Zaključujemo da vrijedi

$$\overrightarrow{a}_0 = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|} \cdot \overrightarrow{a}.$$

Obzirom da smo utvrdili formulu za $|\overrightarrow{a}|$ u koordinatiziranom prostoru, sada slijede formule za jedinični vektor koje iskazujemo sljedećim propozicijama.

Propozicija 1.26 *Neka je* $\overrightarrow{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ *ravninski vektor. Tada vrijedi*

$$\overrightarrow{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \right) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}\vec{i} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}\vec{j}.$$

Propozicija 1.27 *Neka je* $\overrightarrow{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ *prostorni vektor. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a}_0 &= \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \right) = \\ &= \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\vec{i} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\vec{j} + \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\vec{k}. \end{aligned}$$

Zadatak 1.28 *Zadan je vektor* $\overrightarrow{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. *Odredi duljinu vektora* $\overrightarrow{a}$, *te jedinični vektor* $\overrightarrow{a}_0$ *u smjeru vektora* $\overrightarrow{a}$. *Provjeri da* $\overrightarrow{a}_0$ *ima jediničnu duljinu.*

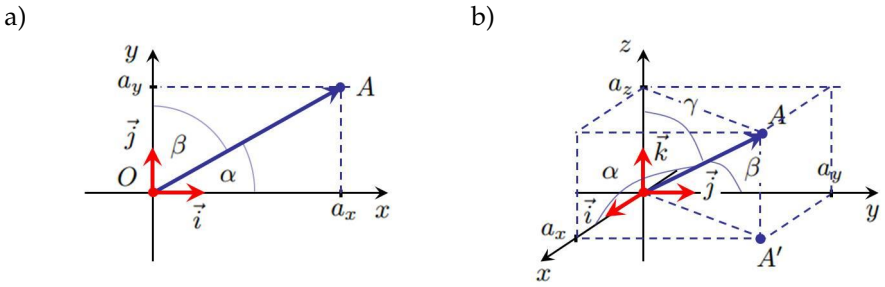
1.5.5 Prikloni kutevi

Pojam priklonih kuteva nismo do sada uveli, pa prije nego krenemo s analitičkim formulama, potrebno je najprije definirati priklone kuteve.

Definicija 1.29 *Neka je* $\overrightarrow{a}$ *vektor u ravnini.* Prikloni kutevi *vektora* $\overrightarrow{a}$ *su kutevi koje taj vektor zatvara s vektorima* $\vec{i}$ *i* $\vec{j}$*, a označavamo ih redom s* α *i* β*.*

Definicija 1.30 *Neka je* $\overrightarrow{a}$ *vektor u prostoru.* Prikloni kutevi *vektora* $\overrightarrow{a}$ *su kutevi koje taj vektor zatvara s vektorima* $\vec{i}, \vec{j}$ *i* $\vec{k}$*, a označavamo ih redom s* α, β *i* γ*.*

Sada možemo izreći formule po kojima se ti kutevi izračunavaju u koordinatiziranom prostoru, a koje slijede iz trigonometrije pravokutnih trokutova prikazanih na Slikama 1.12.



Slika 1.12: Prikloni kutevi za: a) ravninski vektor, b) prostorni vektor.

Propozicija 1.31 *Neka je* $\overrightarrow{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ *ravninski vektor. Tada je*

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}.$$

Propozicija 1.32 *Neka je* $\overrightarrow{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ *prostorni vektor. Tada je*

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Uspoređujući formule za priklone kuteve s formulama za jedinični vektor, zaključujemo da su prikloni kutevi vektora $\overrightarrow{a}$ jednaki koordinatnim komponentama njegovog jediničnog vektora, tj. da za ravninski vektor $\overrightarrow{a}$ vrijedi

$$\overrightarrow{a}_0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j},$$

dok za prostorni vektor $\overrightarrow{a}$ vrijedi

$$\overrightarrow{a}_0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}.$$

Zadatak 1.33 *Izračunaj priklone kuteve vektora* $\overrightarrow{a} = \vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} - \vec{k}$*.*

1.6 Množenje vektora

Sada želimo definirati množenje dva vektora međusobno. Definirat ćemo dvije vrste množenja: skalarni produkt i vektorski produkt. U obje operacije ulazi par vektora, dok kao rezultat u slučaju skalarnog produkta nastaje skalar, a u slučaju vektorskog produkta nastaje vektor. Da bismo razlikovali između ta dva množenja, uvodimo različite oznake: oznaku "$\cdot$" za skalarni produkt, te oznaku "$\times$" za vektorski produkt.

Prije nego krenemo na definiranje tih dvaju vektora uvedimo sljedeću oznaku za vektor:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \overset{ozn}{=} (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.$$

Također, uvedimo sličnu oznaku za broj:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \overset{ozn}{=} a_x(b_y c_z - b_z c_y) - a_y(b_x c_z - b_z c_x) + a_z(b_x c_y - b_y c_x).$$

1.6.1 Skalarni produkt vektora

Definicija 1.34 *Neka su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ dva vektora, te neka je $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.* Skalarni produkt *vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ je skalar (broj) kojeg označavamo sa $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$, a koji je definiran formulom*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{a}\right| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi. \tag{1.1}$$

Uočimo da je skalarni produkt $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ jednak nula u tri situacije: kad je $\overrightarrow{a}$ nul-vektor, kad je $\overrightarrow{b}$ nul-vektor ili kad su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ okomiti. Također, obzirom da je skalarni produkt definiran kao umnožak tri broja, od kojih su dva sigurno pozitivna ($\left|\overrightarrow{a}\right| \geq 0$ i $\left|\overrightarrow{b}\right| \geq 0$), predznak skalarnog produkta $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ ovisi samo o kutu između ta dva vektora. Zaključujemo sljedeće, kut $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ je:

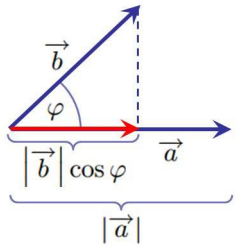
- oštri ako i samo ako je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ pozitivan broj,
- pravi ako i samo ako je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$,
- tupi ako i samo ako je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ negativan broj.

Zadatak 1.35 *Odredi $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ ako je: a) $\left|\overrightarrow{a}\right| = 2$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 3$ i $\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\pi}{3}$, b) $\left|\overrightarrow{a}\right| = 1$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 2$ i $\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{3\pi}{4}$.*

Zadatak 1.36 *Što vrijedi za kut $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ ako je:*

$$a)\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -1, \quad b)\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0, \quad c)\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2, \quad d)\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \tfrac{1}{2}.$$

Geometrijsko značenje skalarnog množenja je sljedeće: skalarni produkt $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ jednak je umnošku duljine vektora $\overrightarrow{a}$ (veličina $|\overrightarrow{a}|$) i skalarne projekcije vektora $\overrightarrow{b}$ na vektor $\overrightarrow{a}$ (veličina $|\overrightarrow{b}| \cos\varphi$). Ovo geometrijsko značenje skalarnog produkta ilustrirano je Slikom 1.13.



Slika 1.13: Geometrijsko značenje skalarnog produkta.

Lako se vidi da skalarni produkt ima sljedeća svojstva:

S1) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$ (komutativnost),

S2) $\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}\overrightarrow{c}$ (distributivnost),

S3) $\lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = (\lambda \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot (\lambda \overrightarrow{b})$ (homogenost),

S4) vrijedi

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \end{aligned}$$

(skalarni produkt koordinatnih vektora),

S5) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$ (kvadriranje vektora).

Uočimo da se svojstva skalarnog produkta mogu iskoristiti za izračunavanje skalarnog produkta u koordinatiziranom prostoru.

Zadatak 1.37 *Korištenjem svojstava skalarnog produkta odredi* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ *ako je* $\overrightarrow{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ *i* $\overrightarrow{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

Na sličan način kao u prethodnom zadatku, samo radeći sa općenitim koordinatiziranim vektorima, dobivamo formulu za skalarni produkt u koordinatiziranom prostoru, a koju izričemo sljedećom propozicijom.

Propozicija 1.38 *Neka su* $\overrightarrow{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ *i* $\overrightarrow{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ *vektori. Tada vrijedi*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} &= \left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right) = \{\text{distributivnost,homogenost}\} = \\
&= a_xb_x(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\cdot\vec{k})+ \\
&\quad +a_yb_x(\vec{j}\cdot\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\cdot\vec{j})+a_yb_z(\vec{j}\cdot\vec{k})+ \\
&\quad +a_zb_x(\vec{k}\cdot\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\cdot\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\cdot\vec{k}) = \\
&= \{\text{skalarni produkt koordinatnih vektora}\} = \\
&= a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.
\end{aligned}$$

■

Zadatak 1.39 *Odredi* $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ *ako je:*

$$a)\ \begin{array}{l}\overrightarrow{a}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}\\ \overrightarrow{b}=\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}\end{array},\qquad b)\ \begin{array}{l}\overrightarrow{a}=\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}\\ \overrightarrow{b}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\end{array}.$$

Što vrijedi za kut između vektora $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$*?*

1.6.2 Vektorski produkt vektora

Definicija 1.40 *Neka su* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *vektori.* Vektorski produkt *vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *je vektor kojeg označavamo s* $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$*, a koji je definiran sa:*

- $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ *ako je* $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ *ili* $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ *ili su vektori* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *kolinearni.*

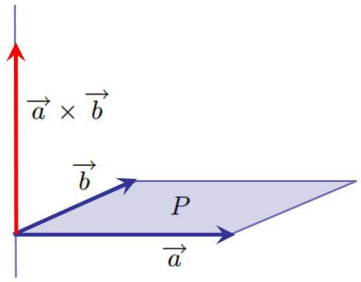
U suprotnom vektor $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ *ima:*

- *duljinu jednaku površini paralelograma kojeg razapinju vektori* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$*,*
- *smjer okomit na smjerove vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$*,*
- *orijentaciju definiranu pravilom desne ruke.*

Naglasimo još jednom, iako je već izrečeno u definiciji, da je vektorski produkt $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ jednak nul vektoru u tri situacije: kad je vektor $\overrightarrow{a}$ nul-vekotr, kad je vetor $\overrightarrow{b}$ nul-vektor ili kad su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kolinearni. Također, uočimo na to kako je definirana duljina i smjer vektorskog produkta, vektorski produkt nam je zgodan "alat" za računanje površina paralelograma (ili trokuta kao polovice paralelograma), te za traženje okomica. Geometrijski, vektorski produkt je ilustriran Slikom 1.14.
Može se pokazati da vektorski produkt ima sljedeća svojstva:

V1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}\right)$ (anti-komutativnost),

V2) $\overrightarrow{a}\times(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}$ (distributivnost),



Slika 1.14: Geometrijsko značenje skalarnog produkta.

V3) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$ (homogenost),

V4) vrijedi

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \end{aligned}$$

(vektorski produkt koordinatnih vektora),

V5) vrijedi $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$, pri čemu je $\varphi = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ (duljina vektorskog produkta).

Svojstva V1), V3), V4) očito slijede iz definicije, a za preostala dva svojstva se uz tek malo više truda također može pokazati da vrijede. Slično kao kod skalarnog produkta, svojstva vektorskog produkta se mogu iskoristiti za izračunavanje vektorskog produkta u koordinatiziranom prostoru.

Zadatak 1.41 *Korištenjem svojstava vektorskog produkta odredi* $\vec{a} \times \vec{b}$ *ako je* $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ *i* $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

Radeći kao u prethodnom zadatku, samo s općenitim koordinatiziranim vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, dobivamo formulu za vektorski produkt u koordinatiziranom prostoru koja je izrečena sljedećom propozicijom.

Propozicija 1.42 *Neka su* $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ *i* $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ *vektori. Tada vrijedi*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.$$

Dokaz. Ova formula slijedi iz svojstava V1)-V4) vektorskog produkta. ■

Zadatak 1.43 *Odredi* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *ako je:*

$$a) \quad \begin{array}{l} \overrightarrow{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \overrightarrow{b} = \vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k} \end{array}, \qquad b) \quad \begin{array}{l} \overrightarrow{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} \\ \overrightarrow{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \end{array}.$$

Zadatak 1.44 *Odredi neki vektor* $\overrightarrow{c}$ *okomit na vektore* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *ako je:*

$$\overrightarrow{a} = \vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k} \text{ i } \overrightarrow{b} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}.$$

Zadatak 1.45 *Odredi površinu trokuta razapetog vektorima* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *ako je:*

$$\overrightarrow{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \text{ i } \overrightarrow{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}.$$

1.6.3 Mješoviti produkt vektora

Mješovito množenje vektora nije neko novo množenje vektora, nego je kombinacija vektorskog i skalarnog množenja. Obzirom da se ta kombinacija često javlja pri rješavanju raznih problema, korisno je navesti neka njena svojstva. Najprije definirajmo mješoviti produkt.

Definicija 1.46 *Neka su* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$ *vektori.* Mješoviti produkt *vektora* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$ *je skalar (broj) kojeg označavamo sa* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$*, a definiran je formulom*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$$

Navedimo sada jedno svojstvo mješovitog produkta.

Uočimo da je mješoviti produkt $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ jednak nula u četiri situacije: ako je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ ili su vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ komplanarni.

Propozicija 1.47 *Neka su* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$ *vektori. Za volumen V paralelepipeda razapetog vektorima* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$ *vrijedi*

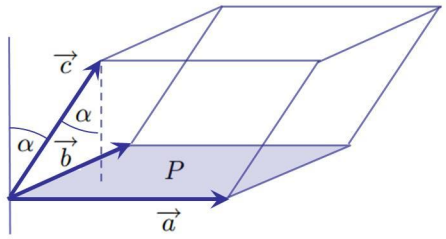
$$V = \left| (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} \right|.$$

Dokaz. Uočimo da vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ u općenitom položaju razapinju paralelelpiped, koji je zapravo kosa prizma kojoj je baza paralelogram razapet vektorima $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, a visina v jednaka projekciji vektora $\overrightarrow{c}$ na okomicu $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ (vidi Sliku 1.15). Ako označimo $\alpha = \measuredangle(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ i pretpostavimo da je α oštri, onda za volumen paralelepipeda vrijedi

$$V = P_B \cdot v = \left| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right| \cdot |\overrightarrow{c}| \cos\alpha = \left| (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} \right|.$$

Dokaz u slučaju tupog kuta α je sličan. ■

Kao kod skalarnog i vektorskog množenja, i ovdje također postoji formula za izračunavanje mješovitog produkta u koordinatiziranom prostoru.



Slika 1.15: Geometrijsko značenje mješovitog produkta.

Propozicija 1.48 *Neka su* $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ *i* $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ *vektori. Tada vrijedi*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x(b_yc_z - b_zc_y) - a_y(b_xc_z - b_zc_x) + a_z(b_xc_y - b_yc_x).$$

Dokaz. Ova formula slijedi iz odgovarajućih formula za skalarni i vektorski produkt. ■

Zadatak 1.49 *Odredi* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *ako je* $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ *i* $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Zadatak 1.50 *Odredi volumen paralelepipeda razapetog vektorima* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *ako je* $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ *i* $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Nadalje, kažemo da su vektori *kolinearni* ako leže na istom pravcu, a *komplanarni* ako leže u istoj ravnini. Sada možemo izreći napomenu koja nam povezuje množenje vektora s različitim međuodnosima tih vektora.

Napomena 1.51 *Neka su* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *tri ne-nul vektora. Tada vrijedi:*

1. *vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *su međusobno okomiti ako i samo ako je* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,
2. *vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *su kolinearni ako i samo ako je* $\vec{a} \times \vec{b} = 0$,
3. *vektori* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *su koplanarni ako i samo ako je* $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

1.7 Linearna (ne)zavisnost vektora

Definicija 1.52 *Neka su* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *vektori.* Linearna kombinacija *vektora* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *je vektor*

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$$

pri čemu su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *realni brojevi.*

Zadatak 1.53 *Napiši (barem) dvije linearne kombinacije vektora*

$$\overrightarrow{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad \overrightarrow{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \; i \; \overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}.$$

Uočimo da jedna linearna kombinacija vektora $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \ldots, \overrightarrow{a}_n$ uvijek daje nul-vektor neovisno o vektorima $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \ldots, \overrightarrow{a}_n$, a to je trivijalna kombinacija $0 \cdot \overrightarrow{a}_1 + 0 \cdot \overrightarrow{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \overrightarrow{a}_n$.

Definicija 1.54 *Neka su $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \ldots, \overrightarrow{a}_n$ vektori. Kažemo da su vektori $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \ldots, \overrightarrow{a}_n$* linearno nezavisni *ako*

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

U suprotnom kažemo da su vektori $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \ldots, \overrightarrow{a}_n$ linearno zavisni.

Dakle, pitanje linearne nezavisnosti vektora je pitanje postojanja netrivijalne linearne kombinacije koja daje nul-vektor. Ako jedino trivijalna kombinacija vektora $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \ldots, \overrightarrow{a}_n$ daje nul-vektor, onda su vektori $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \ldots, \overrightarrow{a}_n$ linearno nezavisni. Ako postoji netrivijalna linearna kombinacija vektora $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \ldots, \overrightarrow{a}_n$ koja daje nul vektor, onda su vektori $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \ldots, \overrightarrow{a}_n$ linearno zavisni.

Zadatak 1.55 *Zadani su vektori*

$$\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \; \overrightarrow{b} = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} \; i \; \overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}.$$

Odredi linearnu kombinaciju $-2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ tih vektora. Što iz toga zaključuješ o linearnoj nezavisnosti tih vektora?

Neka je $\overrightarrow{a}$ neki ne-nul vektor. Vektor $\overrightarrow{b}$ je:

- linearno zavisan od $\overrightarrow{a}$ ($\overrightarrow{b} = \alpha \overrightarrow{a}$) ako i samo ako $\overrightarrow{b}$ leži na istom pravcu kao vektor $\overrightarrow{a}$,
- linearno nezavistan od $\overrightarrow{a}$ ($\overrightarrow{b} \neq \alpha \overrightarrow{a}$) ako i samo ako $\overrightarrow{b}$ ne leži na istom pravcu kao vektor $\overrightarrow{a}$.

Neka su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ linearno nezavisni vektori (tj. ne leže na istom pravcu). Vektor $\overrightarrow{c}$ je:

- linearno zavisan od $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ ($\overrightarrow{c} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}$) ako i samo ako $\overrightarrow{c}$ leži u istoj ravnini kao vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.
- linearno nezavistan od $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ ($\overrightarrow{c} \neq \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}$) ako i samo ako $\overrightarrow{c}$ ne leži u istoj ravnini kao vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

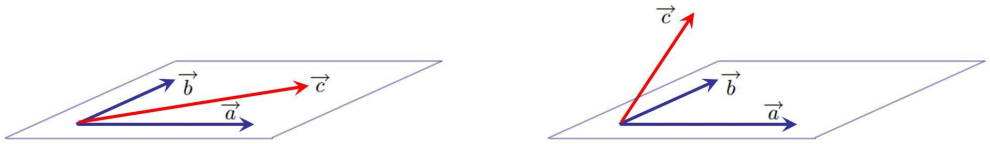
Linearna (ne)zavisnost dva odnosno tri vektora ilustrirana je Slikama 1.16 i 1.17.

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ linearno nezavisni vektori (tj. ne leže u istoj ravnini). Svaki vektor $\overrightarrow{d} \in V^3$ je zavisan od vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ ($\overrightarrow{d} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c}$). Kažemo da skup od tri linearno nezavisna vektora tvori bazu prostora V^3 (jer se svaki preostali vektor može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze). Broj elemenata u bazi naziva se dimenzija prostora. Dakle, za prostor V^3 vrijedi da ima mnoštvo baza, ali sve te baze imaju 3 elementa, pa je dimenzija prostora V^3 jednaka 3. Standardno se za bazu prostora V^3 uzima skup $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

a) b)

Slika 1.16: Dva vektora koji su: a) linearno zavisni, b) linearno nezavisni.

a) b)



Slika 1.17: Tri vektora koji su: a) linearno zavisni, b) linearno nezavisni.

Zadatak 1.56 *Zadan je vektor* $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$. *Odredi vektor* $\vec{b}$ *tako da je: a)* $\vec{b}$ *linearno zavisan od vektora* $\vec{a}$, *b)* $\vec{b}$ *linearno nezavisan od vektora* $\vec{a}$.

Zadatak 1.57 *Zadani su vektori* $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$ *i* $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$. *Jesu li vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *linearno zavisni? Odredi vektor* $\vec{c}$ *tako da je: a) vektor* $\vec{c}$ *linearno zavisan od vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$, *b) vektor* $\vec{c}$ *linearno nezavisan od vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$.

Poglavlje 2

Pravci i ravnine u prostoru

2.1 Ravnina

2.1.1 Osnovni oblik jednadžbe

Neka je π ravnina u prostoru. Ravnina π je jednoznačno određena ako je poznata jedna točka $T_0 \in \pi$, te jedan vektor $\overrightarrow{n}$ okomit na ravninu π. Vektor $\overrightarrow{n}$ naziva se *vektor normale* ravnine π. Uočimo da tada za svaku točku T prostora vrijedi:

1. ako je točka T na ravnini π, onda je vektor $\overrightarrow{T_0T}$ okomit na vektor $\overrightarrow{n}$, pa vrijedi $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{T_0T} = 0$,
2. ako točka T nije na ravnini π, onda vektor $\overrightarrow{T_0T}$ nije okomit na vektor $\overrightarrow{n}$, a niti je nul-vektor, pa mora biti $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{T_0T} \neq 0$.

Ova činjenica ilustrirana je Slikom 2.1. Uočimo da gornje tvrdnje vrijede i za $T = T_0$ jer je tada $\overrightarrow{T_0T} = \overrightarrow{0}$. Dakle, jednadžba

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{T_0T} = 0$$

razlikuje točke prostora na način da sve točke na ravnini π zadovoljavaju tu jednadžbu, dok nijedna od preostalih točaka prostora ne zadovoljava tu jednadžbu, pa tu jednadžbu nazivamo osnovnim oblikom jednadžbe ravnine π.

2.1.2 Vektorski oblik jednadžbe

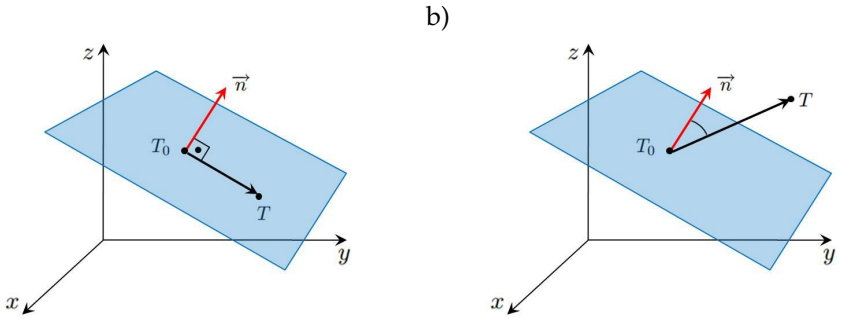
Ako su elementi osnovnog oblika jednadžbe ravnine zadani vektorski sa $\overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{OT_0}$ i $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OT}$, onda po pravilu trokuta za zbrajanje vektora imamo

$$\overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{T_0T} = \overrightarrow{r} \Rightarrow \overrightarrow{T_0T} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0,$$

pa jednadžba ravnine poprima oblik

$$\overrightarrow{n} \cdot \left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0\right) = 0$$

koji se naziva vektorski oblik jednadžbe ravnine.



Slika 2.1: Osnovni oblik jednadžbe ravnine i: a) točka na ravnini, b) točka van ravnine.

2.1.3 Skalarni oblik jednadžbe

Ako su elementi osnovnog oblika jednadžbe ravnine zadani skalarno sa $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i $T(x, y, z)$, onda imamo

$$\overrightarrow{T_0T} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k},$$

pa jednadžba ravnine poprima oblik

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

koji se naziva skalarna jednadžba ravnine. Napomenimo da se skalarna jednadžba ravnine ponekad naziva i jednadžba ravnine kroz točku.

2.1.4 Opći oblik jednadžbe

Raspisivanjem skalarne jednadžbe ravnine dobivamo

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0,$$

pa uvođenjem oznake $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ jednadžba ravnine postaje

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

što se naziva opći oblik jednadžbe ravnine. Opći oblik jednadžbe ravnine je najčešće korišten u praksi.

Zadatak 2.1 *Zadana je ravnina $\pi \ldots 2x + 3y - z + 2 = 0$. Ispitaj leži li točka T na ravnini π, ako je: a) $T(1, 1, 7)$, b) $T(0, 1, -1)$, c) $T(0, 0, 0)$, d) $T(2, -1, 3)$.*

Zadatak 2.2 *Koje od ravnina:*

$$a)\ x - 2y + 3z - 7 = 0, \quad b)\ x - 3z + 4 = 0, \quad c)\ x + 2y - 5z = 0,$$

prolaze ishodištem?

Napomena 2.3 *Ravnina $Ax + By + Cz + D = 0$ prolazi ishodištem ako i samo ako je $D = 0$.*

Uočimo da se iz općeg oblika jednadžbe ravnine $Ax + By + Cz + D = 0$ lako iščita normala $\overrightarrow{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$.

Zadatak 2.4 *Zadane su ravnine:*

$$a)\ 2x - y + 3z - 4 = 0, \quad b)\ x - z + 2 = 0, \quad c)\ x + y - 3z = 0.$$

Odredi njihove vektore normale.

Uočimo nadalje da točka T_0 i vektor normale $\overrightarrow{n}$ kojim se zadaje ravnina π mogu biti različiti, pa nas zanima kako se različiti odabir tih elemenata reflektira na općoj jednadžbi ravnine.

Zadatak 2.5 *Ravnina π prolazi točkom $T(1, 1, -2)$ i ima vektor normale:*

$$a)\ \overrightarrow{n} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \quad b)\ \overrightarrow{n} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Odredi opću jednadžbu ravnine π.

Obzirom da su vektori normale iz prethodnog primjera kolinearni, to znači da je u oba slučaja zadana ista ravnina, a dobiva se različita jednadžba ravnine. Zaključujemo da jednadžba ravnine nije jedinstvena, ali da dvije različite jednadžbe iste ravnine imaju proporcionalne koeficijente A, B, C i D.

Zadatak 2.6 *Ravnina π ima vektor normale $\overrightarrow{n} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ i prolazi točkom:*

$$a)\ T(1, 2, -1), \quad b)\ T(2, -2, 3).$$

Odredi opću jednadžbu ravnine π.

Uočimo da su ravnine iz prethodnog primjera paralelne, te da se to reflektira na njihovim općim jednadžbama tako da su koeficijenti A, B i C proporcionalni, dok koeficijent D nije u proporciji. Iskažimo sada naša opažanja iz dva prethodna primjera u sljedećoj napomeni.

Napomena 2.7 *Ravnine*

$$\pi_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \; i \; \pi_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

su međusobno:

- *paralelne, ako i samo ako je*
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \lambda,$$
- *jednake, ako i samo ako je*
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1} = \lambda.$$

Zadatak 2.8 *Zadane su ravnine:*

$$a)\ \begin{matrix} 2x - y + z + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 2z + 3 = 0 \end{matrix}, \quad b)\ \begin{matrix} x - 3y + 1 = 0 \\ 2x - 6y + 2 = 0 \end{matrix}, \quad c)\ \begin{matrix} x - y + 2z + 1 = 0 \\ x + y + 4z + 3 = 0 \end{matrix}.$$

Jesu li navedene ravnine jednake ili paralelne?

2.1.5 Jednadžba ravnine kroz tri točke

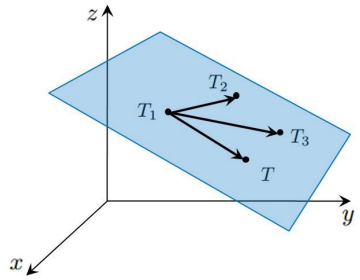
Ravnina π je određena je i sa tri nekolinearne točke: $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$ i $T_3(x_3, y_3, z_3)$. Za bilo koju točku T prostora vrijedi da leži na ravnini π ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{T_1T}$, $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T_3}$ komplanarni. Obzirom da su tri vektora komplanarni ako i samo ako im je mješoviti produkt jednak nula, time dobivamo jednadžbu

$$\left(\overrightarrow{T_1T} \times \overrightarrow{T_1T_2}\right) \cdot \overrightarrow{T_1T_3} = 0,$$

odnosno

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

koja se naziva jednadžba ravnine kroz tri točke. Ova jednadžba ilustrirana je Slikom 2.2.



Slika 2.2: Jednadžba ravnine kroz tri točke.

Zadatak 2.9 *Odredi jednadžbu ravnine π koja prolazi točkama $T_1(2, 1, 3)$, $T_2(4, 5, -1)$ i $T_3(3, 3, 0)$.*

2.1.6 Segmentni oblik jednadžbe ravnine

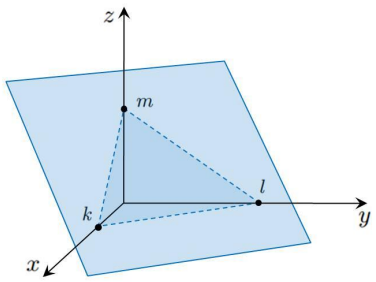
Neka je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednadžba ravnine π. Ako je $D = 0$, onda ravnina π prolazi ishodištem. Ako je pak $D \neq 0$, onda se opći oblik jednadžbe ravnine može podijeliti sa $-D$, pa dobivamo

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1.$$

Uvođenjem odgovarajućih oznaka, jednadžba ravnine poprima oblik

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{l} + \frac{z}{m} = 1$$

koji se naziva segmentni oblik jednadžbe ravnine. Napomenimo još jednom da se jednadžba ravnine može napisati u segmentnom obliku ako i samo ako ravnina ne prolazi ishodištem. Nadalje, uvrštavanjem u jednadžbu ravnine lako se vidi da točke $K(k, 0, 0)$, $L(0, l, 0)$ i $M(0, 0, m)$ leže na π, pa su k, l, m odsječci na koordinatnim osima. Segmentni oblik jednadžbe ravnine ilustriran je Slikom 2.3.



Slika 2.3: Segmentni oblik jednadžbe ravnine.

Zadatak 2.10 *Zadane su ravnine:*

$$a)\ 2x - y + 4z - 2 = 0,\ b)\ x - 2y + 3z = 0,\ c)\ -2x + 3y + 6 = 0.$$

Koje od tih ravnina se mogu napisati u segmentnom obliku? Za one koje mogu, napiši segmentni oblik jednadžbe i skiciraj te ravnine.

2.2 Pravac

2.2.1 Osnovni oblik jednadžbe pravca

Neka je p pravac u prostoru. Pravac p je jednoznačno određen ako je poznata jedna točka $T_0 \in p$, te jedan vektor $\overrightarrow{s}$ paralelan s p. Vektor $\overrightarrow{s}$ naziva se *vektor smjera* pravca p. Uočimo da tada za svaku točku T prostora vrijedi:

1. ako točka T leži na pravcu p, onda je vektor $\overrightarrow{T_0T}$ kolinearan sa $\overrightarrow{s}$, pa je $\overrightarrow{T_0T} = \lambda\overrightarrow{s}$;
2. ako točka T ne leži na pravcu p, onda vektor $\overrightarrow{T_0T}$ nije kolinearan sa $\overrightarrow{s}$, pa je $\overrightarrow{T_0T} \neq \lambda\overrightarrow{s}$.

Ova činjenica ilustrirana je Slikom 2.4. Uočimo da gornje tvrdnje vrijede i za $T = T_0$ jer je tada $\overrightarrow{T_0T} = \overrightarrow{0}$. Dakle, jednadžba

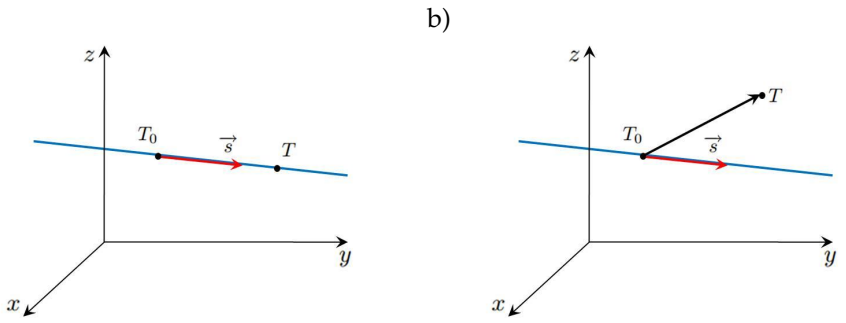
$$\overrightarrow{T_0T} = \lambda\overrightarrow{s}$$

razlikuje točke prostora na način da sve točke na pravcu p zadovoljavaju tu jednadžbu, dok nijedna od preostalih točaka prostora ne zadovoljava tu jednadžbu, pa tu jednadžbu nazivamo osnovnim oblikom jednadžbe pravca p.

2.2.2 Vektorski oblik jednadžbe

Ako su elementi osnovnog oblika jednadžbe pravca zadani vektorski sa $\overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{OT_0}$ i $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OT}$, onda po pravilu trokuta za zbrajanje vektora imamo

$$\overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{T_0T} = \overrightarrow{r} \Rightarrow \overrightarrow{T_0T} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0,$$



Slika 2.4: Osnovni oblik jednadžbe pravca i: a) točka na pravcu, b) točka van pravca.

pa jednadžba pravca poprima oblik

$$\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0 = \lambda \overrightarrow{s} \Rightarrow \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_0 + \lambda \overrightarrow{s}$$

koji se naziva vektorska parametarska jednadžba pravca.

2.2.3 Skalarni oblik jednadžbe

Ako su elementi osnovnog oblika jednadžbe ravnine zadani skalarno sa $\overrightarrow{s} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i $T(x, y, z)$, onda imamo

$$\overrightarrow{T_0T} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k},$$

pa je jednadžba pravca $\overrightarrow{T_0T} = \lambda \overrightarrow{s}$ ekvivalentna sa

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda a \\ y - y_0 = \lambda b \\ z - z_0 = \lambda c \end{cases}, \text{ tj. } \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \quad \text{za } \lambda \in \mathbb{R},$$

a ovaj oblik jednadžbe pravca se naziva skalarna parametarska jednadžba.

2.2.4 Kanonska jednadžba pravca

Ako u skalarnoj parametarskoj jednadžbi pravca izlučimo λ, te izjednačimo sve tri jednakosti po λ, dobivamo *kanonsku jednadžbu* pravca

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Kanonsku jednadžbu pravca ne treba shvaćati strogo kao jednakost triju razlomaka. Naime, nazivnici ne označavaju dijeljenje, već skalarnu komponentu vektora smjera, pa ih pišemo i kad su jednaki 0.

Zadatak 2.11 *Napiši kanonsku jednadžbu pravca p kroz točku $T_0(1, -2, 3)$ s vektorom smjera $\overrightarrow{s} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$. Ispitaj leže li točke $T_1(2, 0, 1)$ i $T_2(-1, -7, 4)$ na pravcu p.*

Zadatak 2.12 *Napiši parametarsku jednadžbu pravca*

$$p \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-2}{-5}.$$

Odredi nekoliko točaka na pravcu p.

2.2.5 Jednadžba pravca kroz dvije točke

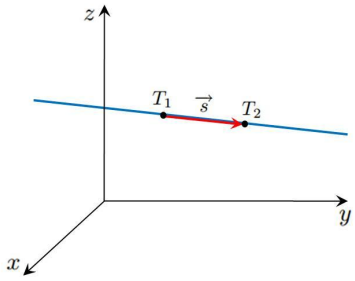
Pravac p određen je i sa 2 različite točke: $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2(x_2, y_2, z_2)$. Tada vektor smjera pravca može biti

$$\vec{s} = \overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Uvrštavanjem u kanonsku jednadžbu pravca dobivamo

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

što se naziva jednadžba pravca kroz dvije točke. Jednadžba pravca kroz dvije točke ilustrirana je Slikom 2.5.



Slika 2.5: Jednadžba pravca kroz dvije točke.

2.2.6 Pravac kao presjek dviju ravnina

Ako dvije ravnine π_1 i π_2 nisu paralelne, onda one jednoznačno određuju pravac p koji se zapisuje sa

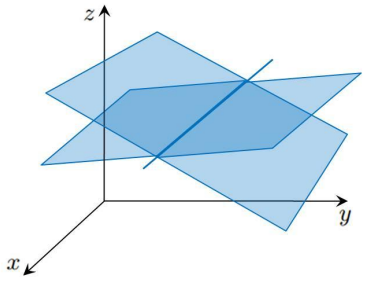
$$p \ldots \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Pravac zadan kao presjek dvije ravnine ilustriran je Slikom 2.5.

2.3 Kutevi

2.3.1 Dva pravca

Definicija 2.13 *Kut između dva pravca je kut između njihovih vektora smjera.*



Slika 2.6: Pravac kao presjek dvije ravnine.

Uočimo da je ovime definiran i kut između mimoilaznih pravaca. Želimo sada izvesti formulu za kut između dva pravca. Neka pravci p_1 i p_2 imaju vektore smjera

$$\overrightarrow{s_1} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k} \text{ i } \overrightarrow{s_2} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}.$$

Za kut φ između pravaca p_1 i p_2 tada vrijedi

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}|\,|\overrightarrow{s_2}|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Kut između dva pravca ilustriran je Slikom 2.7.

2.3.2 Dvije ravnine

Definicija 2.14 *Kut između dvije ravnine je kut između njihovih vektora normale.*

Želimo sada izvesti formulu za kut između dvije ravnine. Neka ravnine π_1 i π_2 imaju vektore normale

$$\overrightarrow{n_1} = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k} \text{ i } \overrightarrow{n_2} = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}.$$

Za kut φ između ravnina π_1 i π_2 tada vrijedi

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\,|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Kut između dvije ravnine ilustriran je Slikom 2.7.

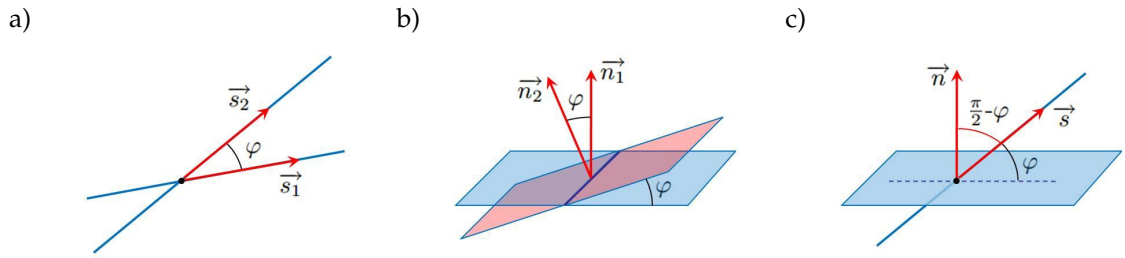
2.3.3 Pravac i ravnina

Definicija 2.15 *Kut između pravca i ravnine je komplement kuta između njihovih vektora smjera i vektora normale.*

Želimo sada izvesti formulu za kut između dvije ravnine. Neka pravac p ima vektor smjera $\overrightarrow{s} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, a ravnina π vektor normale $\overrightarrow{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$. Za kut φ između pravca p i ravnine π tada vrijedi

$$\sin\varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{s}|\,|\overrightarrow{n}|} = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Kut između pravca i ravnine ilustriran je Slikom 2.7.



Slika 2.7: Kut između: a) dva pravca, b) dvije ravnine, c) pravca i ravnine.

2.4 Udaljenosti

2.4.1 Dvije točke

Definicija 2.16 *Udaljenost dviju točaka je duljina vektora s početkom i krajem u tim točkama.*

Definicija udaljenosti dviju točaka ilustrirana je Slikom 2.8. Želimo sada izvesti formulu za udaljenost između dvije točke. Neka su $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i $T_1(x_1, y_1, z_1)$ dvije točke. Tada za udaljenost $d = d(T_0, T_1)$ točaka T_0 i T_1 vrijedi

$$d(T_0, T_1) = \left|\overrightarrow{T_0T_1}\right| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

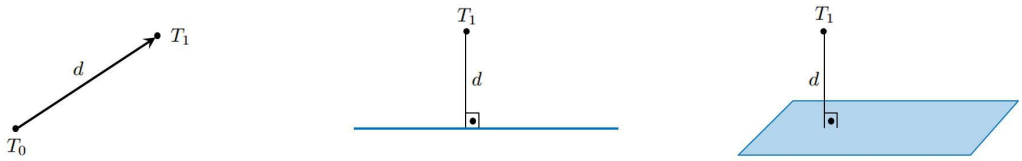
2.4.2 Točka i pravac

Definicija 2.17 *Udaljenost točke od pravca je udaljenost točke od njene ortogonalne projekcije na taj pravac.*

Definicija udaljenosti točke i pravca ilustrirana je Slikom 2.8. Želimo sada izvesti formulu za udaljenost između točke i pravca. Neka je pravac p određen točkom T_0 i vektorom smjera $\overrightarrow{s}$, te neka je T_1 bilo koja točka prostora. Neka je $d = d(T_1, p)$ udaljenost točke T_1 od pravca p. Uočimo da za površinu P paralelograma razapetog vektorima $\overrightarrow{s}$ i $\overrightarrow{T_0T_1}$ vrijedi

$$P = |\overrightarrow{s}| \cdot d \text{ i } P = \left|\overrightarrow{T_0T_1} \times \overrightarrow{s}\right|.$$

a) b) c)



Slika 2.8: Definicija udaljenosti: a) dvije točke, b) točke i pravca, c) točke i ravnine.

Obzirom da je to ista površina, izjednačavanjem po P dobivamo

$$d(T_1, p) = \frac{\left|\overrightarrow{T_0T_1} \times \overrightarrow{s}\right|}{\left|\overrightarrow{s}\right|}.$$

Izvod ove formule ilustriran je Slikom 2.9.

2.4.3 Točka i ravnina

Definicija 2.18 *Udaljenost točke od ravnine je udaljenost točke od njene ortogonalne projekcije na tu ravninu.*

Definicija udaljenosti točke i ravnine ilustrirana je Slikom 2.8. Želimo sada izvesti formulu za udaljenost između točke i ravnine. Neka je ravnina π određena točkom T_0 i vektorom normale $\overrightarrow{n}$, te neka je T_1 bilo koja točka prostora. Neka je $d = d(T_1, \pi)$ udaljenost točke T_1 od ravnine π. Označimo sa φ kut između vektora $\overrightarrow{n}$ i $\overrightarrow{T_0T_1}$. Uočimo da za kosinus kuta φ vrijedi

$$\cos\varphi = \frac{d}{\left|\overrightarrow{T_0T_1}\right|} \text{ i } \cos\varphi = \frac{\overrightarrow{T_0T_1} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{T_0T_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|}.$$

Obzirom da je to isti kut φ, izjednačavanjem po $\cos\varphi$ dobivamo

$$d(T_1, \pi) = \frac{\left|\overrightarrow{T_0T_1} \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|}.$$

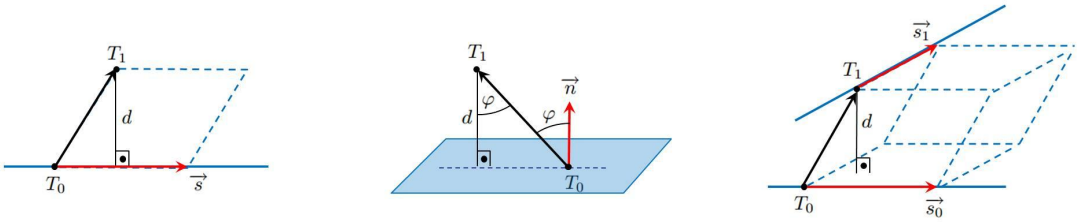
Izvod ove formule ilustriran je Slikom 2.9.

2.4.4 Dva pravca

Definicija 2.19 *Ako se pravci:*

- *sijeku, udaljenost tih pravaca je nula,*

a) b) c)



Slika 2.9: Ilustracija izvoda formule za udaljenost: a) točke i pravca, b) točke i ravnine, c) dvaju mimoliaznih pravaca.

- *paralelni, udaljenost tih pravaca je udaljenost bilo koje točke s jednog pravca do drugog,*
- *mimoilazni, udaljenost tih pravaca je udaljenost bilo koje točke na jednom pravcu do ravnine koja mu je paralelna a sadrži drugi pravac.*

Definicija udaljenosti dvaju pravaca ilustrirana je Slikom 2.10. Uočimo da vrijednost odnosno formulu za slučajeve kad se pravci sijeku ili su paralelni već imamo. Sada želimo izvesti formulu za udaljenost u slučaju kad su pravci mimoilazni.

Neka su p_0 i p_1 mimoilazni pravci, pri čemu je pravac p_0 određen sa točkom T_0 i vektorom smjera $\overrightarrow{s_0}$, dok je pravac p_1 određen sa točkom T_1 i vektorom smjera $\overrightarrow{s_1}$. Neka je $d = d(p_0, p_1)$ udaljenost pravaca p_0 i p_1. Označimo sa V volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\overrightarrow{s}_0$, $\overrightarrow{s}_1$ i $\overrightarrow{T_0T_1}$. Uočimo da za volumen V vrijedi

$$V = \left|\overrightarrow{s}_0 \times \overrightarrow{s}_1\right| \cdot d \text{ i } V = \left|(\overrightarrow{s}_0 \times \overrightarrow{s}_1) \cdot \overrightarrow{T_0T_1}\right|.$$

Obzirom da je to jedan te isti volumen, izjednačavanjem po V dobivamo

$$d(p_0, p_1) = \frac{\left|(\overrightarrow{s}_0 \times \overrightarrow{s}_1) \cdot \overrightarrow{T_0T_1}\right|}{\left|\overrightarrow{s}_0 \times \overrightarrow{s}_1\right|}.$$

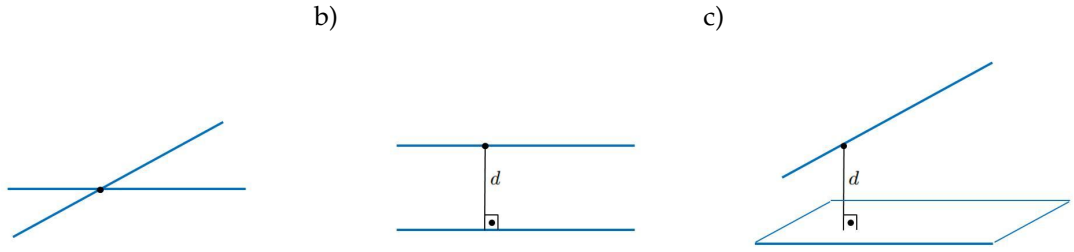
Izvod ove formule ilustriran je Slikom 2.9.

2.4.5 Pravac i ravnina

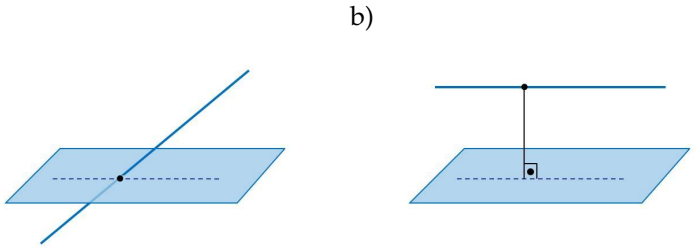
Definicija 2.20 *Ako se pravac i ravnina:*

- *sijeku, udaljenost im je nula,*
- *paralelni, udaljenost im je udaljenost bilo koje točke s pravca od ravnine.*

Definicija udaljenosti pravca i ravnine ilustrirana je Slikom 2.11. Uočimo da iznos udaljenosti pravca i ravnine u slučaju kad se oni sijeku već imamo po definiciji, a u slučaju kad su pravac i ravnina paralelni onda se ta udaljenost računa po formuli za udaljenost točke i ravnine koju smo već izveli. Dakle, ovdje ne trebamo izvoditi nikakve dodatne formule.



Slika 2.10: Udaljenost dvaju pravaca koji: a) se sijeku, b) su paralaleni, c) su mimoilazni.



Slika 2.11: Udaljenost pravca i ravnine koji: a) se sijeku, b) su paralelni.

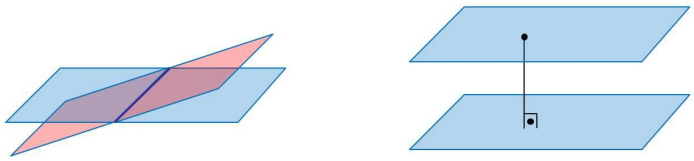
2.4.6 Dvije ravnine

Definicija 2.21 *Ako se dvije ravnine:*

- *sijeku, udaljenost im je nula,*
- *paralelne, udaljenost im je udaljenost bilo koje točke s jedne ravnine do druge ravnine.*

Definicija udaljenosti dviju ravnina ilustrirana je Slikom 2.12. Uočimo da iznos udaljenosti dviju ravnina u slučaju kad se one sijeku već imamo po definiciji, a u slučaju kad su one paralelne ta udaljenost se računa po formuli za udaljenost točke i ravnine koju smo već izveli. Dakle, ni ovdje ne trebamo izvoditi nikakve dodatne formule.

a) b)



Slika 2.12: Udaljenost dvije ravnine koje: a) se sijeku, b) su paralelne.

Poglavlje 3

Matrice

3.1 Osnovni pojmovi

3.1.1 Definicija matrice

Definicija 3.1 *Pravokutnu tablicu brojeva*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

pri čemu je $m, n \in \mathbb{N}$ *te* $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *za svaki* $i = 1, \dots, m$ *i* $j = 1, \dots, n$ *nazivamo* realnom matricom *tipa* $m \times n$.

Uvedimo sada neke nazive vezane za matricu. Broj m je *broj redaka*, broj n je *broj stupaca*, a brojevi a_{ij} se nazivaju *matrični elementi*. Nadalje, elementi $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ tvore $i-$ti *redak*, dok elementi $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ tvore $j-$ti *stupac* matrice. Ako je $m = 1$ kažemo da je matrica *retčana*, dok ako je $n = 1$ kažemo da je matrica *stupčana*. Retčane i stupčane matrice se jednim imenom nazivaju *vektori*.

Matrice ćemo najčešće označavati velikim tiskanim slovima $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{X}, \dots$, dok ćemo vektore označavati s $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \dots$. Nadalje, matricu $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$ s elementima a_{ij} za $i = 1, \dots, m$ i $j = 1, \dots, n$ često ćemo kraće zapisivati s $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m,n}$. Skup svih matrica tipa $m \times n$ označavat ćemo sa $\mathcal{M}_{m,n}$.

Zadatak 3.2 *Za matricu*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \pi \\ 2 & 1 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

odredi kojeg je tipa, koji elementi tvore drugi redak, a koji četvrti stupac!

Zadatak 3.3 *Kojeg tipa su matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad i \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}?$$

Kako nazivamo te matrice?

Definicija 3.4 *Kažemo da su matrice* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m,n}$ *i* $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{k,l}$ *jednake ako su istog tipa (tj.* $m = k$ *i* $n = l$*), te imaju jednake odgovarajuće elemente (tj.* $a_{ij} = b_{ij}$ *za svaki* $i = 1, \ldots, m$ *i* $j = 1, \ldots, n$*).*

Zadatak 3.5 *Ispitaj je li* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ *ako je:*

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ *i* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ *i* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ *i* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Definicija 3.6 *Kažemo da je matrica* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}$ kvardatna *ako je* $m = n$.

Za kvadratnu matricu tipa $n \times n$ kažemo još i da je matrica *reda* n. Skup $\mathcal{M}_{n,n}$ označavamo još i s $\mathcal{M}_n$. *Glavnu dijagonalu* kvadratne matrice $\mathbf{A}$ reda n čine elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Zadatak 3.7 *Je li matrica* $\mathbf{A}$ *kvadratna ako je:*

$$a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ b)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\ c)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ako matrica $\mathbf{A}$ *jest kvadratna, kojeg je reda i koji elementi tvore glavnu dijagonalu?*

Definicija 3.8 *Neka je* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m,n}$ *matrica.* Transponirana matrica $\mathbf{A}^T$ *matrice* $\mathbf{A}$ *je matrica* $\mathbf{A}^T = \left[a_{ji}\right]_{n,m}$.

Zadatak 3.9 *Odredi* $\mathbf{A}^T$ *ako je*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

3.1.2 Neke matrice specijalnog oblika

Nul-matrica

Nul-matrica je svaka matrica kojoj su svi elementi 0, bez obzira kojeg je tipa. Nulmatrica se označava s **O**. Sljedeće matrice su nul-matrice

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Dijagonalna matrica

Dijagonalna matrica je kvadratna matrica kojoj su svi elementi van glavne dijagonale jednaki 0. Sljedeće matrice su dijagonalne

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Jedinična matrica

Jedinična matrica je kvadratna matrica kojoj su svi elementi na dijagonali jednaki 1, a svi elementi van dijagonale jednaki 0. Jedinična matrica se označava s $\mathbf{I}$, a ako se želi naglasiti da je reda n, tada se označava s $\mathbf{I}_n$. Uočimo da je jedinična matrica specijalan slučaj dijagonalne matrice. Sljedeće matrice su jedinične

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Trokutaste matrice

Postoje dvije vrste trokutastih matrica - gornje trokutaste i donje trokutaste.

Gornjetrokutasta matrica je svaka kvadratna matrica kojoj su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki 0. Sljedeće matrice su gornjetrokutaste

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Donjetrokutasta matrica je svaka kvadratna matrica kojoj su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki 0. Sljedeće matrice su donjetrokutaste

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

3.1.3 Matrica kao skup vektora

Stupce (i retke) matrice možemo shvatiti kao vektore. Tako možemo smatrati da je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sastavljena od vektora redaka

$$\begin{array}{l} \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}, \\ \qquad\qquad \vdots \\ \mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \end{array} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$$

ili pak od sljedećih vektora stupaca

$$\mathbf{a}^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \ \mathbf{a}^n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 & \mathbf{a}^2 & \dots & \mathbf{a}^n \end{bmatrix}.$$

3.2 Računske operacije s matricama

3.2.1 Zbrajanje matrica

Definicija 3.10 *Neka su* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m,n}$ *i* $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{m,n}$ *matrice istog tipa. Tada je*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m,n}.$$

Uočimo iz definicije da se mogu zbrajati samo matrice istog tipa. Zbroj matrica različitog tipa nije definiran.

Zadatak 3.11 *Izračunaj* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *ako je*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad i \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zbrajanje matrica iz $\mathcal{M}_{m,n}$ ima sljedeća svojstva:

Z1) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ (asocijativnost)

Z2) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (komutativnost)

Z3) za svaku matricu $\mathbf{A}$ vrijedi $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$ (postojanje neutralnog elementa),

Z4) za svaku matricu $\mathbf{A}$ postoji njoj *suprotna matrica* $-\mathbf{A}$ takva da je $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ (postojanje suprotnog elementa).

3.2.2 Množenje matrice sa skalarom

Definicija 3.12 *Neka je* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m,n}$ *matrica i* $\lambda \in \mathbb{R}$ *skalar (broj). Tada je*

$$\lambda\mathbf{A} = \left[\lambda a_{ij}\right]_{m,n}.$$

Dakle, kad se matrica $\mathbf{A}$ pomnoži skalarom λ nastaje matrica koju označavamo s $\lambda\mathbf{A}$ koja je istog tipa kao matrica $\mathbf{A}$, a matrični elementi joj se dobivaju tako da se svaki matrični element matrice $\mathbf{A}$ pomnoži s λ.

Zadatak 3.13 *Izračunaj* $-2\mathbf{A}$ *ako je*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Množenje matrica iz $\mathcal{M}_{m,n}$ sa skalarom ima sljedeća svojstva:

M1) $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$ (distributivnost prema zbrajanju u $\mathcal{M}_{m,n}$),

M2) $(\lambda+\mu)\,\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$ (distributivnost prema zbrajanju u $\mathbb{R}$),

M3) $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$ (kompatibilnost množenja),

M4) $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{O}$,

M5) $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ (netrivijalnost množenja).

3.2.3 Množenje matrica

Prije nego što krenemo na definiciju množenja matrica, potreban nam je pojam ulančanih matrica. Kažemo da su dvije matrice *ulančane* ako je broj stupaca prve matrice jednak broju redaka druge matrice.

Definicija 3.14 *Neka su* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ *i* $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n,p}$ *dvije ulančane matrice. Umnožak matrica* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *je matrica*

$$\mathbf{AB} = [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}]_{m,p} = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}]_{m,p}. \tag{3.1}$$

Dakle, iz definicije je očito da se množiti mogu samo ulančane matrice. Kao rezultat množenja nastaje matrica koja ima isti broj redaka kao prva matrica u umnošku, broj stupaca kao druga matrica u umnošku, a element u $i-$tom retku i $j-$tom stupcu matrice $\mathbf{AB}$ dobiva se tako da se zbroje umnošci odgovarajućih elemenata $i-$tog retka matrice $\mathbf{A}$ i $j-$tog stupca matrice $\mathbf{B}$.

Primjer 3.15 *Neka su*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad i \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}$$

općenite matrice. Postoji li matrica $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$*? Ako postoji, odredi element* c_{23}!

Rješenje. Uočimo da su ove matrice ulančane, pa je umnožak definiran. Kao rezultat množenja nastaje matrica $\mathbf{C}$ tipa 2×4. Vrijedi

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}.$$

Uočimo da se u pribrojnicima ove sume mijenjaju samo podebljani indeksi, pa se suma može napisati kao

$$c_{23} = \sum_{k=1}^{3} a_{2\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}3}.$$

■

Zadatak 3.16 *Izračunaj* $\mathbf{AB}$ *i* $\mathbf{BA}$ *ako je:*

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ *i* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$,

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *i* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *i* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Uočimo da množenje matrica ima neka "neobična" svojstva.

1. Općenito je $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

   Naime, umnožak matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ najčešće nije uopće definiran u oba poretka množenja. Čak i kad je definiran, rezultat množenja su najčešće matrice različitog tipa. A čak i kad nastanu matrice istog tipa, najčešće se ne podudaraju u svim elementima. Dakle, općenito je $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ iako mogu postojati matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ za koje je $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

2. Ako je $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, to ne znači da mora biti $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ ili $\mathbf{B} = \mathbf{O}$.

   Uočimo da vrijedi obratno, ako je $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ ili $\mathbf{B} = \mathbf{O}$, to znači da mora biti $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$. Dakle, iz faktora se može zaključivati o umnošku. No, obratno ne vrijedi, iz umnoška se ne može zaključivati o faktorima.

Množenje matrica ima sljedeća svojstva uvijek kad su svi umnošci definirani:

1. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (asocijativnost),

2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ (distributivnost),

3. $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$ (postojanje neutralnog elementa),

4. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

3.3 Regularne matrice

Uočimo da kod množenja brojeva imamo svojstvo postojanja suprotnog (inverznog) elementa obzirom na množenje (za svaki $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ postoji $x^{-1} \in \mathbb{R}$ takav da je $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$). Postavlja se pitanje postojanja inverza obzirom na množenje.

Definicija 3.17 *Neka je $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ kvadratna matrica reda n. Kažemo da je matrica $\mathbf{A}^{-1} \in \mathcal{M}_n$* inverzna matrica *matrice $\mathbf{A}$ ako vrijedi*

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Uočimo da svi realni brojevi $x \in \mathbb{R}$ (osim broja $x = 0$) imaju inverz x^{-1} obzirom na množenje. Međutim, može se pokazati da postoje brojne matrice $\mathbf{A}$ koje nemaju inverznu matricu $\mathbf{A}^{-1}$, pa uvodimo sljedeće nazive.

Definicija 3.18 *Kažemo da je kvadratna matrica* $\mathbf{A}$ regularna *ako ima inverznu matricu. U suprotnom kažemo da je matrica* $\mathbf{A}$ singularna.

Zadatak 3.19 *Neka su $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$ regularne kvadratne matrice. Pokaži da je tada $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.*

Sada se postavljaju sljedeća pitanja.

1. Kako znati je li kvadratna matrica $\mathbf{A}$ regularna?
2. Ako je kvadratna matrica regularna, kako odrediti njen inverz?

Da bismo odgovorili na ta pitanja, potrebno je najprije uvesti pojmove elementarnih transformacija matrice, te potom determinante i ranga matrice.

3.4 Elementarne transformacije

U sljedećim poglavljima transformirat ćemo matrice do željenog oblika (npr. do gornjetrokutaste matrice), ali na način da bitna svojstva matrice ostanu nepromijenjena. Transformacije kojima se to postiže bit će nam jako važne, pa najprije definiramo te transformacije matrice.

Definicija 3.20 Elementarne transformacije *matrice* $\mathbf{A}$ *su:*

E1) zamjena dvaju redaka (ili dvaju stupaca),

E2) množenje nekog retka (ili nekog stupca) skalarom različitim od 0,

E3) dodavanje nekom retku drugog retka (ili nekom stupcu drugog stupca) pomnožnog nekim skalarom.

Uočimo, dakle, da se elementarne transformacije mogu provoditi nad retcima i nad stupcima.

Definicija 3.21 *Neka su $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m,n}$. Kažemo da su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$* ekvivalentne *(pišemo $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$) ako se jedna iz druge mogu dobiti primjenom elementarnih transformacija konačno puta.*

Zadatak 3.22 *Za matricu*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

odredi njoj ekvivalentne matrice koje iz nje nastaju: a) zamjenom prvog i trećeg retka, b) množenjem drugog retka brojem 2*, c) dodavanjem trećem retku drugog retka pomnoženog s* -2.

3.5 Determinante

3.5.1 Definicija determinante

Definicija 3.23 *Neka je* $\mathbf{A} = [a_{11}]$ *kvadratna matrica reda* 1. *Determinanta matrice* $\mathbf{A}$ *je broj* $\det \mathbf{A}$ *definiran s* $\det \mathbf{A} = |a_{11}| = a_{11}$.

Definicija 3.24 *Neka je*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

kvadratna matrica reda 2. *Determinanta matrice* $\mathbf{A}$ *je broj* $\det \mathbf{A}$ *definiran s*

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Zadatak 3.25 *Izračunaj determinantu matrice* $\mathbf{A}$, *ako je*

$$a)\ \mathbf{A} = [-3]\,,\ b)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determinante matrica reda višeg od dva definirat ćemo induktivno, tj. determinantu reda n definirat ćemo kao zbroj n determinanti reda $n-1$. Najprije trebamo uvesti sljedeće pojmove.

Definicija 3.26 *Neka je* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$ *kvadratna matrica.* Minora M_{ij} *elementa* a_{ij} *matrice* $\mathbf{A}$ *je determinanta matrice koja nastaje kad iz matrice* $\mathbf{A}$ *izbrišemo* $i-$*ti redak i* $j-$*ti stupac.* Algebarski komplement A_{ij} *elementa* a_{ij} *matrice* $\mathbf{A}$ *definiran je sa* $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Zadatak 3.27 *Za matricu*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

odredi minore M_{12} *i* M_{31}, *te algebarske komplemente* A_{22} *i* A_{32}.

Definicija 3.28 *Neka je* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$ *kvadratna matrica. Determinanta matrice* $\mathbf{A}$ *je broj* $\det \mathbf{A}$ *definiran s*

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \text{(razvoj po } i-\text{tom retku)}$$

ili pak sa

$$\det \mathbf{A} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \qquad \text{(razvoj po } j-\text{tom stupcu)}$$

Razvoji pomoću kojih je definirana determinanta nazivaju se još i *Laplaceovi razvoji* po retku ili stupcu, te se može pokazati da svi daju isti rezultat. Dakle, determinanta je dobro definirana.

Primjer 3.29 *Razvij determinantu matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

po prvom retku.

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

■

Iz prethodnog primjera možemo uočiti da se kod determinanti reda tri determinanta izračunava kao suma 6 pribrojnika, svaki od kojih je umnožak tri elementa matrice, pri čemu se tri pribrojnika zbrajaju, a tri oduzimaju. To nam daje jednostavnu shemu za izračunavanje matrica reda 3 koja se naziva *Sarrusovo pravilo*, a koje kaže da se determinanta matrice reda 3 može izračunati tako da se nadopišu prva dva retka matrice kao četvrti i peti stupac, pa se zbroje umnošci elemenata na prve tri glavne dijagonale, a potom oduzmu umnošci elemenata na tri sporedne dijagonale.

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Zadatak 3.30 *Zadana je matrica*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odredi determinantu matrice $\mathbf{A}$ *razvojem: a) po drugom retku, b) po trećem stupcu.*

3.5.2 Svojstva determinanti

Lako se vidi da determinanta ima sljedeća svojstva.

D1) Ako matrica $\mathbf{A}$ ima redak (ili stupac) koji se sastoji od samih nula, onda je $\det \mathbf{A} = 0$.

D2) Determinanta trokutaste matrice jednaka je umnošku elemenata na dijagonali.

D3) Ako matrica $\mathbf{A}$ ima dva jednaka retka (ili stupca), onda je $\det \mathbf{A} = 0$.

D4) Matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}^T$ imaju istu determinantu, tj. vrijedi $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.

D5) Ako se svi elementi nekog retka (ili stupca) matrice rastave na zbroj dvaju pribrojnika, onda je determinanta te matrice jednaka zbroju determinanti odgovarajućih dviju matrica.

Zadatak 3.31 *Korištenjem svojstava determinante odredi* $\det \mathbf{A}$*, ako je*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determinanta ima i sljedeće svojstvo.

Teorem 3.32 (Binet-Cauchy) *Neka su* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$ *dvije kvadratne matrice. Tada vrijedi* $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$.

Zadatak 3.33 *Koristeći Teorem Binet-Cauchy pokaži da je* $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}$.

Konačno, posebno je važno ponašanje determinante prema elementarnim transformacijama koje izričemo sljedećom propozicijom.

Propozicija 3.34 *Neka je* $\mathbf{A}$ *kvadratna matrica. Ako je matrica* $\mathbf{B}$ *dobivena iz matrice* $\mathbf{A}$*:*

1. *zamjenom dvaju redaka (ili dvaju stupaca), onda je* $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$;
2. *množenjem nekog retka (ili nekog stupca) skalarom* $\lambda \neq 0$*, onda je* $\det \mathbf{B} = \lambda \det \mathbf{A}$;
3. *dodavanje nekom retku drugog retka (ili nekom stupcu drugog stupca) pomnožnog nekim skalarom, onda je* $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$.

Dakle, elementarne transformacije ne čuvaju vrijednost determinante, ali zaključujemo da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.35 *Neka su* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$ *dvije međusobno ekvivalentne kvadratne matrice. Tada su determinante tih matrica ili obje jednake nula ili obje različite od nula.*

Dakle, sada se determinanta kvadratne matrice može računati tako da je elementarnim transformacijama svedemo na gornjetrokutastu matricu, a onda determinantu odredimo po svojstvu koje kaže da je determinanta gornje trokutaste matrice jednaka umnošku elemenata na dijagonali. Takav način izračunavanja je puno efikasniji i brži kad su u pitanju matrice višeg reda, a mi možemo postupak ilustrirati rješavanjem determinante reda tri u sljedećem zadatku.

Zadatak 3.36 *Koristeći elementarne transformacije izračunaj* $\det \mathbf{A}$*, ako je*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.6 Rang matrice

3.6.1 Definicija ranga

Definicija 3.37 Podmatrica *matrice* $\mathbf{A}$ *je svaka matrica koja se iz matrice* $\mathbf{A}$ *može dobiti uklanjanjem bilo kojih redaka i/ili stupaca.*

Nekoliko različitih podmatrica općenite matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{4,4}$ su

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Definicija 3.38 *Neka je $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}$ matrica.* Rang $r(\mathbf{A})$ *matrice $\mathbf{A}$ je red njezine najveće kvadratne podmatrice kojoj je determinanta različita od nula.*

Zadatak 3.39 *Odredi $r(\mathbf{A})$, ako je*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Možemo zaključiti da je vrlo mukotrpno određivati rang matrice po definiciji, jer je potrebno izračunati previše determinanti. Međutim, jednu stvar možemo vrlo lako zaključiti već iz definicije, a to je koliko $r(\mathbf{A})$ najviše može biti. Naime, obzirom da najveća kvadratna podmatrica matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}$ ima red $\min\{m,n\}$, očito da za rang matrice $\mathbf{A}$ vrijedi $r(\mathbf{A}) \leq \min\{m,n\}$.

Zadatak 3.40 *Koliki najviše može biti rang matrice $\mathbf{A}$, ako je:*

$$a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix},\ b)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix},\ c)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 9 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.6.2 Rang matrice u reduciranoj formi

Definicija 3.41 *Neka je $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}$ matrica. Kažemo da je matrični element a_{ij}* stožer *retka i, ako je to prvi ne-nul element u tom retku.*

Definicija 3.42 *Neka je $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}$ matrica. Kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ u* reduciranoj formi *ako vrijedi:*

1. *svi nul-retci (ako takvih ima) nalaze se iza ne-nul redaka,*
2. *stožer svakog retka je strogo desno od stožera prethodnog retka.*

Zadatak 3.43 *Ispitaj je li matrica $\mathbf{A}$ u reduciranoj formi, ako je:*

$$a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$c)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad d)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obrazloži odgovor.

Ako je matrica u reduciranoj formi, te ima k redaka različitih od nula, onda je determinanta svake kvadratne podmatrice reda većeg od k jednaka nula jer mora sadržavati redak sa samim nulama, dok kvadratna podmatrica reda k čija determinanta je različita od 0 sigurno postoji, to je barem ona koja sadrži retke i stupce u kojima se nalaze stožeri. Ilustrirajmo to primjerom kvadratnih podmatrica općenite matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{5,5}$ u reduciranoj formi koja ima $k = 3$ redaka različitih od nula

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zaključujemo dakle da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.44 *Neka je* $\mathbf{A}$ *matrica u reduciranom obliku. Rang* $r(\mathbf{A})$ *matrice* $\mathbf{A}$ *jednak je broju ne-nul redaka matrice* $\mathbf{A}$.

Dakle, rang matrica u reduciranoj formi se vrlo lako određuje, dovoljno je samo baciti pogled na matricu.

Zadatak 3.45 *Ispitaj je li matrica* $\mathbf{A}$ *u reduciranoj formi, te ako jest odredi* $r(\mathbf{A})$*, ako je:*

$$a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, b)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, c)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.6.3 Rang općenite matrice

Uočimo da vršeći elementarne transformacije nad recima (stupcima) matrice $\mathbf{A}$, ujedno vršimo te iste transformacije na svim njenim podmatricama koje sadrže te retke (stupce). Primjerice, vrijedi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} III \\ II \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 & 7 \\ 4 & 10 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} 2III = \mathbf{A}'.$$

Dakle, ne samo da je matrica $\mathbf{A}$ ekvivalentna nastaloj matrici $\mathbf{A}'$, nego su i sve njene podmatrice ekvivalentne odgovarajućim podmatricama matrice $\mathbf{A}'$. Obzirom da ekvivalentne (pod)matrice ili obje imaju determinantu $= 0$ ili obje imaju determinantu $\neq 0$ (vidi Teorem 3.35), zaključujemo da se elementarnim transformacijama nad matricom ne mijenja red najveće podmatrice čija determinanta je različita od nula, tj. ne mijenja se rang. Taj zaključak formalno izričemo sljedećim teoremom.

Teorem 3.46 *Elementarne transformacije ne mijenjaju rang matrice.*

Sada rang općenite matrice možemo određivati tako da:

1. elementarnim transformacijama svedemo matricu $\mathbf{A}$ na reduciranu formu (dobivamo neku novu matricu $\mathbf{A}'$ u reduciranoj formi);

2. očitamo rang dobivene matrice $\mathbf{A}'$ kao broj ne-nul redaka.

Ovaj postupak je valjan jer elementarne transformacije ne mijenjaju rang, pa je

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}').$$

Zadatak 3.47 *Odredi rang matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -12 \end{bmatrix}.$$

3.6.4 Elementarne matrice

Elementarne transformacije $E1$, $E2$ i $E3$ nad matricom $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}$ mogu se postići tako da se matrica $\mathbf{A}$ pomnoži s lijeva matricom $\mathbf{E}$ točno određenog oblika. Matrica $\mathbf{E}$ naziva se *elementarna matrica*, a dobiva se iz matrice $\mathbf{I}_m$ vršenjem željene elementarne transformacije nad njom.

Zadatak 3.48 *Neka je*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pronađi matricu $\mathbf{E}$ *kojom je potrebno pomnožiti s lijeva matricu* $\mathbf{A}$ *tako da množenje rezultira: a) zamjenom drugog i trećeg retka u matrici* $\mathbf{A}$, *b) množenjem trećeg retka matrice* $\mathbf{A}$ *skalarom* 2, *c) dodavanjem trećem retku matrice* $\mathbf{A}$ *prvog retka prethodno pomnoženog s* -1.

3.7 Inverzna matrica

Podsjetimo se, kad smo govorili o množenju matrica uveli smo pojam inverza kvadratne matrice. Preciznije, inverzna matrica kvadratne matrice $\mathbf{A}$ je definirana kao matrica $\mathbf{A}^{-1}$ sa svojstvom

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Zatim smo uveli naziv regularna matrica za matricu koja ima inverz, te singularna matrica za matricu koja nema inverz. Konačno, postavili smo dva pitanja:

- kako znati je li neka kvadratna matrica regularna (tj. ima li inverznu matricu),
- ako kvadratna matrica jest regularna, kako odrediti njenu inverznu matricu?

To nisu trivijalna pitanja, pa smo morali razviti teoriju o determinanti i rangu, prije nego što možemo na njih odgovoriti. Sada kad smo uveli pojmove determinante i ranga, konačno možemo odgovoriti na ta pitanja.

3.7.1 Determinanta i inverzna matrica

Sljedeći teorem nam daje kriterij za utvrđivanje regularnosti matrice.

Teorem 3.49 *Kvadratna matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ je regularna ako i samo ako je* $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Da bismo za regularne matrice mogli iskazati formulu po kojoj se inverzna matrica izračunava, najprije je potrebno uvesti pojam adjunkte matrice.

Definicija 3.50 *Neka je $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ kvadratna matrica, te neka je $\widetilde{\mathbf{A}} = \left[A_{ij}\right]_{n,n}$* matrica algebarskih komplemenata *matrice $\mathbf{A}$. Matrica $\widetilde{\mathbf{A}}^T$ zove se* adjunkta *matrice $\mathbf{A}$.*

Sada se može pokazati da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.51 *Neka je $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ kvadratna matrica. Ako je $\mathbf{A}$ regularna, onda je $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \widetilde{\mathbf{A}}^T$.*

Zadatak 3.52 *Odredi (ako postoji) inverznu matricu matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3.53 *Odredi (ako postoji) inverznu matricu matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.7.2 Rang i inverzna matrica

Želimo utvrditi vezu između ranga i regularnosti matrice. Najprije uočimo da elementarne transformacije ne mogu promijeniti determinantu matrice iz 0 u broj različit od 0 i obratno (vidi Teorem 3.35). Obzirom da je matrica regularna ako i samo ako joj je determinanta različita od 0, zaključujemo da vrijedi sljedeća lema.

Lema 3.54 *Neka su $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$ međusobno ekvivalentne kvadratne matrice. Matrice $\mathbf{A}$ i B su ili obje regularne ili obje singularne.*

Nadalje, uočimo da je matrica u reduciranoj formi zapravo gornjetrokutasta matrica, pa joj je determinanta jednaka umnošku elemenata na dijagonali. Dakle, matrica u reduciranoj formi će imati determinantu različitu od 0 ako i samo ako ima puni rang (svi elementi na dijagonali su stožeri). To formalno izričemo kao sljedeću lemu.

Lema 3.55 *Neka je $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ kvadratna matrica u reduciranoj formi. Matrica $\mathbf{A}$ je regularna ako i samo ako ima puni rang (tj. $r(\mathbf{A}) = n$).*

Dakle, sada ove dvije leme možemo sažeti u sljedeći teorem.

Teorem 3.56 *Kvadratna matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ je regularna ako i samo ako ima puni rang (tj. $r(\mathbf{A}) = n$).*

Uočimo da nam ovaj teorem daje odgovor na prvo od dva postavljena pitanja, tj. daje nam kriterij kojim pomoću ranga matrice možemo odgovoriti na pitanje je li matrica regularna. Preostaje odgovoriti na drugo pitanje, tj. kako pronaći inverznu matricu $\mathbf{A}^{-1}$ u slučaju kad matrica $\mathbf{A}$ jest regularna. Taj odgovor nije dan u obliku formule, nego u obliku postupka kojim se određuje inverzna matrica. Taj postupak je sljedeći.

1) Formiramo matricu tipa $n \times 2n$, u kojoj je u prvih n stupaca napisana matrica $\mathbf{A}$, a u drugih n stupaca jedinična matrica $\mathbf{I}_n$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{I}_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right].$$

2) Vršimo elementarne transformacije nad matricom dok na lijevoj polovici ne dobijemo jediničnu matricu $\mathbf{I}_n$, tj. dok ne dobijemo matricu oblika

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \end{array}\right],$$

ili dok s lijeve strane ne dobijemo nul-redak.

3) Ako smo s lijeve strane uspjeli dobiti matricu $\mathbf{I}_n$, onda je matrica $\mathbf{A}$ regularna i vrijedi $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$. Ako smo pak s lijeve strane dobili nul-redak, onda matrica $\mathbf{A}$ nema puni rang, pa je singularna i nema inverz.

Ovakav postupak eliminacije naziva se *Gauss-Jordanova eliminacija*. Obrazložimo ukratko zašto ovaj postupak uistinu rezultira inverznom matricom. Naime, već smo pokazali da se elementarne transformacije mogu prikazati kao matrično množenje, pa mi ovim postupkom radimo sljedeće

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{I}_n \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_1\mathbf{A} & \mathbf{E}_1\mathbf{I}_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} & \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{I}_n \end{array}\right] = \dots = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} & \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{I}_n \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Ako smo s lijeve strane uspjeli dobiti jediničnu matricu, to znači da je

$$\underbrace{\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1}_{\mathbf{A}^{-1}}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n,$$

pa matrica $\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$ udovoljava definiciji inverzne matrice od $\mathbf{A}$. Uočimo da smo s desne strane dobili upravo tu matricu jer je $\mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{I}_n = \mathbf{E}_k \cdots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$.

Zadatak 3.57 *Gauss-Jordanovom eliminacijom odredi* $\mathbf{A}^{-1}$, *ako je:*

$$a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ b)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & -10 & -4 \end{bmatrix}.$$

3.8 Linearna (ne)zavisnost matrica

3.8.1 Definicija linearne nezavisnosti

Slično kao i kod vektora, i za matrice se može definirati pojam linearne nezavisnosti. Najprije definiramo linearnu kombinaciju matrica.

Definicija 3.58 *Neka su* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *matrice istog tipa.* Linearna kombinacija *matrica* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ *je svaka matrica oblika*

$$\lambda_1\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{A}_n$$

pri čemu su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *realni brojevi.*

Zadatak 3.59 *Napiši (barem) dvije različite linearne kombinacije matrica* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *i* $\mathbf{C}$, *ako je*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Definicija 3.60 *Neka su* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *matrice istog tipa. Kažemo da su matrice* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ linearno nezavisne *ako*

$$\lambda_1\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{A}_n = \mathbf{O} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Pojasnimo malo ovu definiciju. Dakle, pitamo se kad je linearna kombinacija nekih matrica $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ jednaka nul-matrici. Jedna mogućnost je trivijalna linearna kombinacija, tj. kombinacija u kojoj su svi koeficijenti λ_i jednaki nula, i ta kombinacija uvijek postoji. Pitanje je postoji li netrivijalna kombinacija koja daje nul-matricu. Ako ne postoji onda su matrice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ linearno nezavisne, a ako postoji onda su matrice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ linearno zavisne i u tom slučaju se bar jedna od njih može prikazati da zavisi o preostalima.

Zadatak 3.61 *Odredi linearnu kombinaciju* $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} - \mathbf{C}$ *ako je*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Što iz toga zaključuješ o linearnoj nezavisnosti matrica $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *i* $\mathbf{C}$?

3.8.2 Linearna (ne)zavisnost redaka ili stupaca u matrici

Prisjetimo se da se matrica može shvatiti kao da je sastavljena od matrica redaka ili od matrica stupaca, pa se može razmatrati pitanje linearne nezavisnosti redaka ili stupaca u matrici. Uočimo da za kvadratnu matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ u kojoj je primjerice zadnji redak redak linearna kombinacija prva dva retka, vrijedi

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{11} + \mu a_{21} & \lambda a_{12} + \mu a_{22} & \ldots & \lambda a_{1n} + \mu a_{2n} \end{vmatrix} = \\ &= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Zaključujemo da općenito vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.62 *Retci (stupci) kvadratne matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ su linearno nezavisni ako i samo ako je* $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Osim pomoću determinante, linearnu zavisnost redaka u matrici možemo ispitivati i pomoću ranga. Naime, uočimo da za matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}$ u kojoj je primjerice zadnji redak linearna kombinacija prva dva retka, vrijedi

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{11} + \mu a_{21} & \lambda a_{12} + \mu a_{22} & \dots & \lambda a_{1n} + \mu a_{2n} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} & \dots & \mu a_{2n} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ R_n - \lambda R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ R_n - \mu R_2 \end{matrix} = \mathbf{A}'$$

Dakle, ako je neki redak u matrici $\mathbf{A}$ linearna kombinacija preostalih redaka, onda je matrica $\mathbf{A}$ ekvivalentna matrici $\mathbf{A}'$ u kojoj je taj redak popunjen nulama. Zaključujemo da općenito vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.63 *Broj linearno nezavisnih redaka (odnosno stupaca) matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}$ jednak je rangu $r(\mathbf{A})$ te matrice.*

Uočimo sada da za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ reda n vrijedi: matrica $\mathbf{A}$ je regularna ako i samo ako $\det \mathbf{A} \neq 0$, nadalje $\det \mathbf{A} \neq 0$ ako i samo ako su retci matrice $\mathbf{A}$ linearno nezavisni, te konačno retci matrice $\mathbf{A}$ su linearno nezavisni ako i samo ako je $r(\mathbf{A}) = n$. Zaključujemo da vrijedi sljedeći korolar.

Korolar 3.64 *Kvadratna matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ je regularna ako i samo ako ima puni rang (tj. $r(\mathbf{A}) = n$).*

Uočimo da je rang "moćniji" alat za ispitivanje linearne nezavisnosti redaka (odnosno stupaca) u matrici iz dva razloga:

1. pomoću ranga se može ispitivati linearna nezavisnost redaka (ili stupaca) u matrici bilo kojeg tipa, dok se pomoću determinante to može raditi samo za kvadratne matrice,
2. rang nam kaže točan broj linearno nezavisnih redaka (ili stupaca) u matrici, dok nam determinanta kaže samo jesu li svi retci (ili stupci) nezavisni ili nisu.

Zadatak 3.65 *Ispitaj jesu li retci matrice $\mathbf{A}$ linearno nezavisni, ako je*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3.66 *Odredi broj linearno nezavisnih stupaca u matrici $\mathbf{A}$, ako je*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Poglavlje 4

Sustavi linearnih jednadžbi

4.1 Osnovni pojmovi

Definicija 4.1 Linearna jednadžba *sa* $n \in \mathbb{N}$ *nepoznanica je svaka jednadžba oblika*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

pri čemu su $a_j \in \mathbb{R}$ *realni koeficijenti, dok je* $b \in \mathbb{R}$ *slobodni član.*

Ako je $n \leq 3$, onda se nepoznanice u jednadžbi često označavaju sa x, y, z umjesto sa x_1, x_2 i x_3. Geometrijski interpretirano, linearna jednadžba sa:

- dvije nepoznanice predstavlja pravac u ravnini (npr. $2x - y = 5$),
- tri nepoznanice predstavlja ravninu u prostoru (npr. $x + y + z = 1$).

Jednadžbe sa više od tri nepoznanice se ne mogu geometrijski interpretirati, jer one predstavljaju tzv. hiperravnine u hiperprostoru (radi se o prostorima dimenzije veće od 3).

Definicija 4.2 Rješenje *linearne jednadžbe* $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ *sa* $n \in \mathbb{N}$ *nepoznanica je svaka uređena* $n-$*torka* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *čije koordinate zadovoljavaju tu jednadžbu.*

Zadatak 4.3 *Ispitaj jesu li:*

1. *točke* $(1, 2)$ *i* $(0, 2)$ *rješenja jednadžbe* $2x + y = 4$,
2. *točke* $(0, 0, 2)$ *i* $(1, 1, 0)$ *rješenje jednadžbe* $x + y + 2z = 2$,

te geomtrijski interpretiraj odgovor!

Kod jednadžbe sa dvije nepoznanice, uređeni par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se interpretira kao proizvoljna točka ravnine, pri čemu:

- par (x, y) jest rješenje linearne jednadžbe ako točka $T(x, y)$ leži na pravcu kojeg jednadžba predstavlja,

- par (x, y) nije rješenje linearne jednadžbe ako točka $T(x, y)$ ne leži na pravcu kojeg jednadžba predstavlja.

Kod jednadžbe sa tri nepoznanice, uređeni par $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ se interpretira kao proizvoljna točka prostora, pri čemu:

- par (x, y, z) jest rješenje linearne jednadžbe ako točka $T(x, y, z)$ leži na ravnini koju jednadžba predstavlja,
- par (x, y, z) nije rješenje linearne jednadžbe ako točka $T(x, y, z)$ ne leži na ravnini koju jednadžba predstavlja,

Definicija 4.4 *Neka su $m, n \in \mathbb{N}$.* Sustav m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica *je svaki sustav oblika*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{4.1}$$

pri čemu su $a_{ij} \in \mathbb{R}$ realni koeficijenti za svaki $i = 1 \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$, dok je $b_i \in \mathbb{R}$ slobodni član za svaki $i = 1 \ldots, m$.

Definicija 4.5 Rješenje *sustava m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica je svaka uređena $n-$torka $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ koja je rješenje svake jednadžbe sustava.*

Zadatak 4.6 *Riješi sustav, te geometrijski interpretiraj rješenje, ako je*

$$\text{a)}\ \begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}\ , \quad \text{b)}\ \begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ 4x + 2y &= 8 \end{aligned}\ , \quad \text{c)}\ \begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ 4x + 2y &= 4 \end{aligned}\ .$$

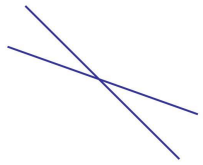
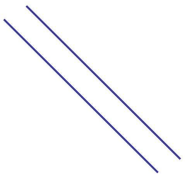
Uočimo sljedeće, ako jednadžbe u sustavu imaju dvije nepoznanice, onda se radi o pravcima u ravnini, a broj jednadžbi je broj pravaca. Dakle, sustav:

- dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice se interpretira kao dva pravca u ravnini (vidi Sliku 4.1),
- tri jednadžbe sa dvije nepoznanice se interpretira kao tri pravca u ravnini (vidi Sliku 4.2),
- m jednadžbi sa dvije nepoznanice se interpretira kao m pravaca u ravini.

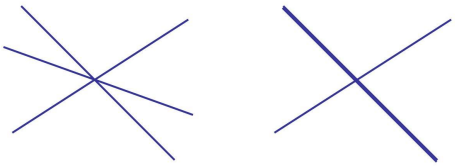
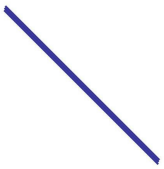
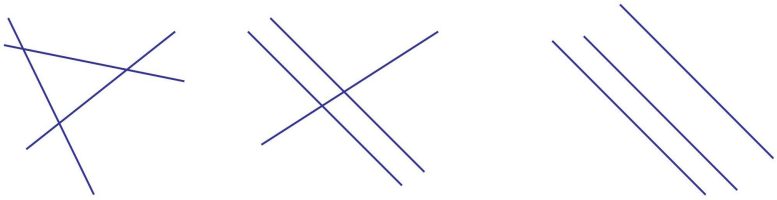
Nadalje, ako jednadžbe u sustavu imaju tri nepoznanice, onda se radi o ravninama u prostoru, a broj jednadžbi je broj ravnina. Dakle, sustav:

- dvije jednadžbe sa tri nepoznanice interpretira kao dvije ravnine u prostoru (vidi Sliku 4.3),
- tri jednadžbe sa tri nepoznanice interpretira kao tri ravnine u prostoru (vidi Sliku 4.4),
- m jednadžbi sa tri nepoznanice interpretira kao m ravnina u prostoru.

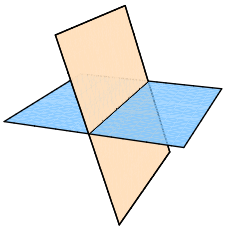
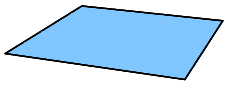
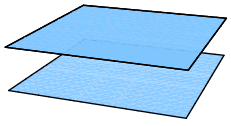
Sustav sa više od tri nepoznanice ne možemo vizualizirati jer se radi o tzv. hiperravninama u hiperprostoru, tj. prostoru čija dimenzija je veća od 3.

jedinstveno rješenje	jednoparametarsko rješenje	nema rješenja
		

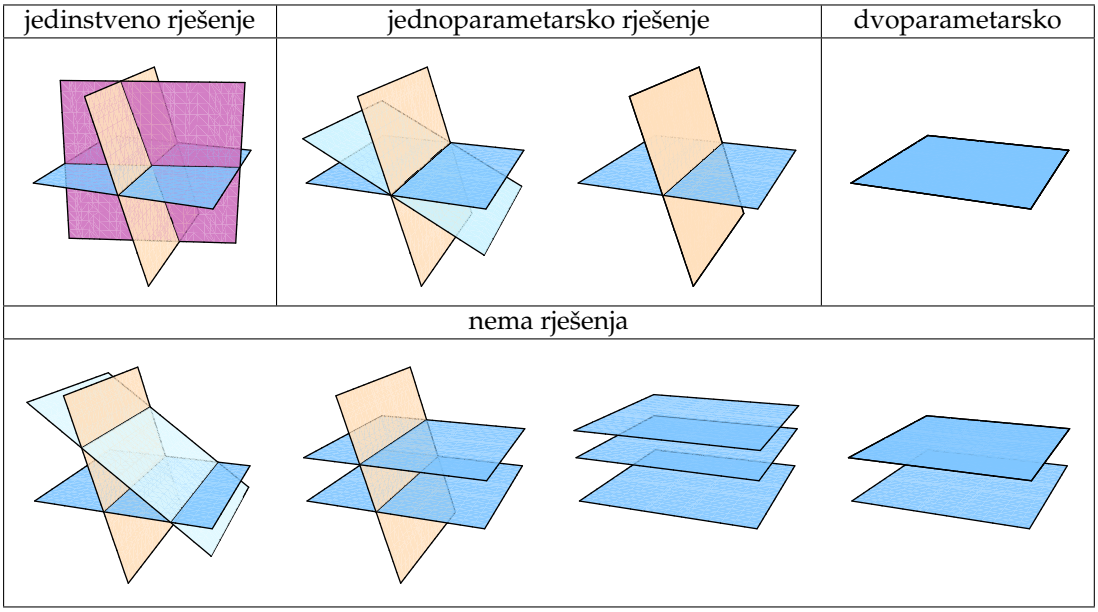
Slika 4.1: Geometrijska interpretacija sustava 2 linearne jednadžbe sa 2 nepoznanice.

jedinstveno rješenje	jednoparametarsko rješenje
	
nema rješenja	
	

Slika 4.2: Geometrijska interpretacija sustava 3 linearne jednadžbe sa 2 nepoznanice.

jednoparametarsko rješenje	dvoparametarsko rješenje	nema rješenja
		

Slika 4.3: Geometrijska interpretacija sustava 3 linearne jednadžbe sa 3 nepoznanice.



Slika 4.4: Geometrijska interpretacija sustava 3 linearne jednadžbe sa 3 nepoznanice.

4.2 Rješavanje općenitog sustava

Uočimo da se općeniti sustav m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica (4.1) može zapisati u obliku matrične jednadžbe

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

ili kraće sa $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, pri čemu je $\mathbf{A}$ matrica koeficijenata, $\mathbf{x}$ vektor nepoznanica, te $\mathbf{b}$ vektor slobodnih članova. Da je ovakva matrična jednadžba uistinu ekvivalentna sustavu slijedi iz definicije množenja i jednakosti matrica. Naime, matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{x}$ su ulančane jer je $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$, dok je $\mathbf{x}$ tipa $n \times 1$, te kao rezultat množenja nastaje matrica $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ koja je tipa $m \times 1$. Dakle, dobivamo matričnu jednadžbu

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Iz definicije jednakosti matrica slijedi da su ove dvije matrice jednake ako i samo ako su im jednaki odgovarajući elementi, tj. ako vrijedi

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

što je upravo sustav m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica (4.1).

Zadatak 4.7 *Zapiši matrično sustave:*

$$a)\ \begin{array}{c} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 4 \end{array},\ b)\ \begin{array}{c} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1 \end{array}.$$

Sada možemo razmatrati pitanje kako rješiti sustave linearnih jednadžbi primjenom matričnog računa. Najprije nam je potreban pojam proširene matrice sustava.

Definicija 4.8 *Neka je sustav m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica prikazan matrično sa* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. *Tada se proširena matrica sustava definira sa*

$$\mathbf{A}_p = \left[\ \mathbf{A}\ \middle|\ \mathbf{b}\ \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Uočimo da sljedeće transformacije sustava ne mijenjaju sustav (tj. njegovo rješenje):

- zamjena dviju jednadžbi,
- množenje neke jednadžbe sustava brojem različitim od nula,
- dodavanje nekoj jednadžbi sustava druge jednadžbe prethodno pomnožene nekim brojem.

Lako se vidi da ovim transformacijama sustava odgovaraju elementarne transformacije nad retcima matrice $\mathbf{A}_p$. Sada dakle možemo zaključiti sljedeće.

Definicija 4.9 *Kažemo da su sustavi linearnih jednadžbi* ekvivalentni *ako imaju ekvivalentne proširene matrice sustava.*

Teorem 4.10 *Ekvivalentni sustavi imaju isto rješenje.*

Sada dakle problem karakterizacije rješenja sustava, te rješavanja sustava, možemo svesti na karakterizaciju rješenja i rješavanje ekvivalentnog sustava koji je u najpogodnijoj formi.

Definicija 4.11 *Kažemo da je sustav linearnih jednadžbi reduciran, ako mu je proširena matrica u reduciranoj formi.*

Analiziranjem odnosa broja jednadžbi i nepoznanica u reduciranom sustavu, može se pokazati da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 4.12 (Kronecker-Capelli) *Neka je sustav m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica prikazan matrično sa* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. *Sustav* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *ima rješenje ako i samo ako je* $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}_p)$. *Za sustav koji ima rješenje vrijedi: ako je* $r(\mathbf{A}) = n$ *onda je rješenje jedinstvano, a ako je* $r(\mathbf{A}) < n$ *onda je rješenje parametarsko sa* $n - r(\mathbf{A})$ *parametara.*

Uočimo da ovaj teorem daje odgovor na pitanja o postojanju i karakteru rješenja. Preostaje odgovoriti na pitanje kako najlakše riješiti sustav koji ima rješenje. Obzirom da proizvoljni sustav ima isto rješenje kao njemu ekvivalentan reducirani sustav, te obzirom da se reducirani sustav lako rješi rješavanjem od zadnje jednadžbe prema prvoj, zaključujemo da se sustavi mogu elegantno riješiti sljedećim postupkom koji se naziva Gaussova metoda eliminacije.

Postupak rješavanja sustava Gaussovom metodom eliminacije sastoji se od sljedećih koraka:

1) Gaussovom eliminacijom proširene matrice sustava, sustav se svede na njemu ekvivalentan reducirani sustav,

2) primjenom Teorema Kronecker-Capelli diskutira se postojanje i karakter rješenja,

3) pronađe se rješenje reduciranog sustava rješavanjem od zadnje jednadžbe prema prvoj.

Prije nego što ilustriramo ove pojmove konkretnim primjerima, korisno je uvesti naziv za jednu specifičnu vrstu sustava, te vezu rješenja takvog sustava i općenitog sustava.

Definicija 4.13 *Kažemo da je sustav m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica* homogen *ako je oblika*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

U suprotnom kažemo da je sustav nehomogen.

U matričnom zapisu, homogenom sustavu odgovara matrična jednadžba $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Uočimo da homogeni sustav uvijek ima barem jedno rješenje - ono trivijalno $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Jedino pitanje je da li je to trivijalno rješenje jedino rješenje sustava, ili sustav ima i drugih rješenja. Važnu informaciju o odnosu rješenja nehomogenog i rješenja pripadnog homogenog sustava daje sljedeći teorem.

Teorem 4.14 *Rješenje sustava* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *je oblika*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$$

pri čemu je $\mathbf{x}_h$ *rješenje pripadnog homogenog sustava* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, *dok je* $\mathbf{x}_p$ *jedno partikularno rješenje nehomogenog sustava* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Zadatak 4.15 *Gaussovom metodom eliminacije riješi sustav*

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Zadatak 4.16 *Gaussovom metodom eliminacije riješi sustav*

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -2 \\ 3x_1 - 5x_2 &= 10 \end{aligned}$$

Zadatak 4.17 *Gaussovom metodom eliminacije riješi sustav*

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

4.3 Regularni kvadratni sustavi

Ponekad su nam od posebnog interesa sustavi $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ koji imaju jednak broj jednadžbi i nepoznanica. Obzirom da je matrica koeficijenata $\mathbf{A}$ takvog sustava kvadratna, takve sustave ćemo nazivati kvadratnim linearnim sustavima. Uočimo, ako je matrica $\mathbf{A}$ sustava regularna, onda ta matrica ima puni rang, pa u Gaussovoj eliminaciji dobijemo $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}_p) = n$, što znači da takav sustav ima jedinstveno rješenje. A vrijedi i obrat, pa vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 4.18 *Neka je $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ kvadratni sustav linearnih jednadžbi. Sustav $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je matrica sustava $\mathbf{A}$ regularna.*

Uočimo, kvadratni sustav $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ kod kojeg je matrica $\mathbf{A}$ singularna ili nema rješenje ili ima beskonačno mnogo rješenja (tzv. parametarsko rješenje). Kvadratne sustave $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ kod kojih je matrica $\mathbf{A}$ regularna nazivat ćemo kvadratnim regularnim sustavima.

4.3.1 Rješavanje matrične jednadžbe

Teorem 4.19 *Neka je $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ regularni kvadratni sustav. Tada sustav $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima jedinstveno rješenje i vrijedi $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.*

Naglasimo još jednom da se rješavanjem matrične jednadžbe mogu riješiti samo kvadratni sustavi kojima je matrica sustava regularna.

Zadatak 4.20 *Rješavanjem odgovarajuće matrične jednadžbe riješi sustav:*

a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ -2x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$, *b)* $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$, *c)* $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$.

4.3.2 Cramerovo pravilo

Iz Teorema 4.19 može se izvesti Cramerovo pravilo za izračunavanje svake pojedine nepoznanice. U sustavu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ označimo

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \; D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

tj. D označava determinantu matrice koeficijenata $\mathbf{A}$, dok D_j označava determinantu matrice koja se dobije iz matrice $\mathbf{A}$ tako da se $j-$ti stupac zamijeni stupcem slobodnih članova $\mathbf{b}$.

Teorem 4.21 (Cramerovo pravilo) *Neka je $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ regularni kvadratni sustav. Tada sustav $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima jedinstveno rješenje, a komponente tog rješenja se izračunavaju po formulama*

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \; x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Naglasimo još jednom da se Cramerovim pravilom mogu riješiti samo kvadratni sustavi kojima je matrica sustava regularna.

Zadatak 4.22 *Cramerovim pravilom riješi sustav:*

a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ -2x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$, *b)* $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$, *c)* $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$.

Poglavlje 5

Vektorski prostori

U ovom poglavlju cilj nam je objediniti teoriju o vektorima i teoriju o matricama. To se postiže uvođenjem općenitog pojma vektorskog prostora, te uočavanjem da i prostor vektora i prostori matrica udovoljavaju toj općenitoj definiciji vektorskog prostora.

5.1 Definicija vektorskog prostora

Najprije ćemo izreći definiciju vektorskog prostora, a zatim ćemo tu definiciju ilustrirati primjerima najpoznatijih vektorskih prostora.

Definicija 5.1 *Uređena trojka $(X, +, \cdot)$ koja se sastoji od nepraznog skupa X i dviju operacija*

$$\begin{aligned} + &: X \times X \to X \quad \textit{(zbrajanje vektora)} \\ \cdot &: \mathbb{R} \times X \to X \quad \textit{(množenje vektora sa skalarom)} \end{aligned}$$

naziva se vektorski prostor *ako vrijede sljedeća svojstva:*

VP1) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X) \;\; \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ *(komutativnost),*

VP2) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X) \;\; \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ *(asocijativnost),*

VP3) $(\exists \mathbf{0} \in X)\,(\forall \mathbf{x} \in X) \;\; \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ *(postojanje neutralnog vektora),*

VP4) $(\forall \mathbf{x} \in X)\,(\exists \mathbf{x}' \in X) \;\; \mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{x}' + \mathbf{x} = \mathbf{0}$ *(postojanje suprotnog vektora),*

VP5) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,(\forall \mathbf{x} \in X) \;\; \alpha\,(\beta \mathbf{x}) = (\alpha\beta)\,\mathbf{x}$ *(kompatibilnost množenja),*

VP6) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X) \;\; \alpha\,(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ *(distributivnost prema zbrajanju u X),*

VP7) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,(\forall \mathbf{x} \in X) \;\; (\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ *(distributivnost prema zbrajanju u $\mathbb{R}$),*

VP8) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ *(netrivijalnost množenja).*

Pojam vektorskog prostora apstrahira bitna svojstva prostora vektora definiranih u provom poglavlju, te možemo uočiti da osim tih prostora, definiciji vektorskog prostora udovoljavaju i skupovi brojinih drugih objekata.

Primjer 5.2 *Neki najpoznatiji vektorski prostori su sljedeći.*

1. *Skupovi V^1, V^2 i V^3 vektora na pravcu, u ravnini i u prostoru redom su vektorski prostori uz standardne operacije zbrajanja vektora i množenja vektora sa skalarom. Nazivamo ih* klasičnim *vektorskim prostorima.*

2. *Skup matrica $\mathcal{M}_{m,n}$ je vektorski prostor uz standardne operacije zbrajanja matrica i množenja matrica skalarom.*

3. *Skup $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ za } i = 1, \ldots, n\}$ je vektorski prostor uz operacije*

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) + (x_1', \ldots, x_n') &= (x_1 + x_1', \ldots, x_n + x_n'), \\ \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

4. *Skup $\mathcal{P}_n$ svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog n je vektorski prostor uz operacije*

$$\begin{aligned} (x_n t^n + \ldots + x_1 t + x_0) + (x_n' t^n + \ldots + x_1' t + x_0') &= (x_n + x_n')t^n + \ldots + (x_1 + x_1')t + (x_0 + x_0'), \\ \lambda(x_n t^n + \ldots + x_1 t + x_0) &= \lambda x_n t^n + \ldots + \lambda x_1 t + \lambda x_0. \end{aligned}$$

   Prostor svih polinoma $\mathcal{P}$ je također vektorski prostor uz iste operacije.

5. *Skup $\mathcal{F} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$ svih realnih funkcija definiranih na intervalu $[a, b]$ je vektorski prostor uz operacije*

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x). \end{aligned}$$

Da bismo pokazali da su svi prostori navedeni u prethodnom primjeru uistinu vektorski prostori, bilo bi potrebno pokazati da operacije zbrajanja i množenja skalarom udovoljavaju svojstvima VP1-VP8 iz definicije vektorskog prostora.

Zadatak 5.3 *Pokaži da u prostoru $\mathbb{R}^3$ operacija: a) zbrajanja ima svojstvo asocijativnosti, b) množenja sa skalarom ima svojstvo distributivnosti prema zbrajanju u $\mathbb{R}^3$.*

Zadatak 5.4 *Pokaži da u prostoru $\mathcal{P}_1$ operacija: a) zbrajanja ima svojstvo komutativnosti, b) množenja sa skalarom ima svojstvo kompatibilnosti množenja.*

5.2 Linearno nezavisni vektori

Definicija 5.5 *Neka je X vektorski prostor, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in X$ vektori, te $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ brojevi. Vektor*

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{x}_n$$

naziva se linearna kombinacija *vektora $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in X$.*

Definicija 5.6 *Neka je X vektorski prostor, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in X$ vektori. Kažemo da su vektori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ linearno nezavisni ako iz*

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

slijedi da je

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

U suprotnom kažemo da su vektori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ linearno zavisni.

Pojasnimo malo definiciju linearne nezavisnosti. Uočimo da jednakost

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

sasvim sigurno vrijedi za $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Taj odabir koeficijenata naziva se trivijalnim. No, postavlja se pitanje je li taj trivijalni odabir koeficijenata jedini koji u linearnoj kombinaciji daje nulu. Ako je jedini, onda kažemo da su vektori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ linearno nezavisni, a ako nije jedini (nego postoji i još neki netrivijalni) onda su vektori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ linearno zavisni.

5.3 Vektori generatori

Najprije definiramo pojam vektorskog potprostora prostora X.

Definicija 5.7 *Neka je X vektorski prostor, te neka je $W \subseteq X$ neki podskup vektora iz X. Kažemo da je W* vektorski potprostor *prostora X ako je i sam vektorski prostor uz iste operacije s vektorima koje su definirane u X.*

Postavlja se pitanje pod kojim uvjetima je neki podskup $W \subseteq X$ ujedno i potprostor. Svojstva VP1-VP8 će sigurno vrijediti, jer vrijede i u "širem" skupu X, ali se može dogodit da zbroj dva elementa skupa W ne bude više u skupu W. Isto tako, može se dogodit da umnožak nekog elementa iz W nekim skalarom, ne bude više element W. Ako se to ne događa, onda je W sigurno potprostor od X, tj. vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 5.8 *Neka je X vektorski prostor. Skup $W \subseteq X$ je vektorski potprostor prostora X ako i samo ako za svaki $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in W$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{x}' &\in W \quad \textit{(zatvorenost na zbrajanje),} \\ \lambda \mathbf{x} &\in W \quad \textit{(zatvorenost na množenje sa skalarom).} \end{aligned}$$

Par uvjeta zatvorenosti za zbrajanje i zatvorenosti na množenje sa skalarom ekvivalentan je uvjetu da za svaki $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in W$ i za svaki $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mora vrijediti

$$\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x}' \in W.$$

Kao posljedica sljedećeg teorema vrijedi: ako je W potprostor od X, onda nul-vektor $\mathbf{0}$ mora biti sadržan u W.

Zadatak 5.9 *Odgovori na sljedeća pitanja, te obrazloži odgovor.*

1. *Je li skup $\mathcal{G}_3$ svih gornjetrokutastih kvadratnih matrica reda 3 potprostor prostora $\mathcal{M}_3$?*

2. *Je li skup svih dijagonalnih matrica reda n potprostor od $\mathcal{M}_n$?*
3. *Je li skup svih regularnih kvadratnih matrica reda n matrica potprostor od $\mathcal{M}_n$?*
4. *Je li skup svih polinoma samo s parnim potencijama potprostor od $\mathcal{P}_n$?*
5. *Je li skup svih polinoma samo s neparnim potencijama potprostor od $\mathcal{P}_n$?*

Neka je sada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in X$ skup bilo kojih vektora iz X. Definiramo skup svih linearnih kombinacija vektora $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ sa

$$L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \{\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{x}_n : \lambda_i \in \mathbb{R}\} \subseteq X.$$

Skup $L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ je zatvoren na zbrajanje jer vrijedi

$$(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{x}_n) + (\mu_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \mu_n\mathbf{x}_n) = (\lambda_1 + \mu_1)\mathbf{x}_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n)\mathbf{x}_n \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n),$$

a zatvoren je i na množenje sa skalarom jer vrijedi

$$\mu(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{x}_n) = (\mu\lambda_1)\mathbf{x}_1 + \ldots + (\mu\lambda_n)\mathbf{x}_n \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n),$$

pa je $L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ potprostor prostora X.

Definicija 5.10 *Neka je X vektorski prostor, te $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in X$ vektori. Potprostor $L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ prostora X naziva se potprostor prostora X* generiran *vektorima $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, a vektori $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ nazivaju se* vektori generatori *prostora $L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$.*

Uzmimo za primjer klasični vektorski prostor V^3. Za prostor V^3 vrijedi:

- ako je $\overrightarrow{a} \in V^3$ neki ne-nul vektor, onda je

$$L(\overrightarrow{a}) = \{\alpha\overrightarrow{a} : \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\overrightarrow{a}, 3\overrightarrow{a}) = L(\overrightarrow{a}, 3\overrightarrow{a}, -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{a});$$

- ako su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ dva linearno nezavisna vektora, onda je

$$\begin{aligned} L(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) &= \{\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \\ &= L(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}) = L(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{b}) = L(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{b}, 3\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}); \end{aligned}$$

- ako su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V^3$ tri linearno nezavisna vektora, onda je

$$\begin{aligned} L(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) &= \{\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \\ &= L(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, 2a - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = L(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, 2a - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, 2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}) = \\ &= V^3. \end{aligned}$$

Uočimo da je u prethodnom razmatranju $L(\overrightarrow{a})$ prostor svih vektora koji leže na pravcu kroz ishodište, razapetom vektorom $\overrightarrow{a}$, Također, $L(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ je prostor svih vektora koji ležeu ravnini koja prolazi ishodištem, a razapeta je vektorima $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$. Konačno, prostor $L(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ je jednak prostoru V^3.

Uočimo da skupu generatora možemo dodavati vektore, ali oni neće proširiti generirani prostor L ako su linearno zavisni od postojećih generatora. Tek dodavanjem linearno nezavisnih generatora, prostor L se proširuje. Želimo pronaći najmanji skup generatora koji generira cijeli vektorski prostor X, a takav skup nazivat ćemo bazom prostora X. Skup generatora će pri tom biti najmanji mogući, ako su generatori linearno nezavisni.

5.4 Baze vektorskih prostora

Definicija 5.11 *Neka je X vektorski prostor, te $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in X$ vektori. Kažemo da je skup $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subseteq X$* baza *prostora X ako su vektori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ linearno nezavisni i ako generiraju cijeli prostor X.*

Neformalnije rečeno, baza vektorskog prostora je najmanji skup vektora koji generira cijeli vektorski prostor. Činjenica da vektori baze $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ generiraju cijeli vektorski prostor X znači da se svaki vektor $\mathbf{x} \in X$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze, tj. za svaki $\mathbf{x} \in X$ vrijedi

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

I to je činjenica na koju ćemo se jako oslanjati i pozivati u daljnjem razmatranju. Nadalje, vektorski prostor može imati više različitih baza (primjerice, svaki skup tri linearno nezavisna vektora u V^3 je baza od V^3), pa želimo utvrditi što povezuje različite baze istog prostora. U tu svrhu, najprije uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 5.12 *Neka je X vektorski prostor.* Dimenzija $\dim X$ *vektorskog prostora X je najveći broj linearno nezavisnih vektora prostora X.*

Teorem 5.13 *Neka je X vektorski prostor. Svake dvije baze vektorskog prostora X imaju isti broj elemenata. Taj broj je jednak dimenziji prostora X.*

Iako vektorski prostor ima mnoštvo različitih baza, najčešće se u prostoru istakne jedna baza koja se naziva standardna ili kanonska.

Primjer 5.14 *Standardne baze i dimenzije nekih najčešće korištenih vektorskih prostora su sljedeće.*

1. *Standardna baza prostora V^3 je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, pa je* $\dim V^3 = 3$.
2. *Standardna baza prostora $\mathcal{M}_{m,n}$ je skup $\{E_{i,j} : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$, pri čemu je E_{ij} matrica dobivena iz nul-matrice stavljanjem broja 1 umjesto 0 na poziciji ij. Obzirom na broj matrica E_{ij} slijedi da je* $\dim \mathcal{M}_{mn} = mn$. *Primjerice, baza prostora $\mathcal{M}_{2,2}$ je*

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\},$$

   a dimenzija je $\dim \mathcal{M}_{2,2} = 4$.

3. *Standardna baza prostora $\mathcal{M}_{n,1}$ je*

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\right\},$$

   pa je $\dim \mathcal{M}_{n,1} = n$. *Posve analogno vrijedi za prostor $\mathcal{M}_{1,n}$.*

4. *Standardna baza prostora $\mathbb{R}^n$ je $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, pri čemu je*

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e}_1 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots, \mathbf{e}_1 = (0, 0, \ldots, 1),$$

   pa je $\dim \mathbb{R}^n = n$.

5. *Standardna baza prostora $\mathcal{P}_n$ je $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$, pa je* $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$.

Zadatak 5.15 *Može li skup S biti skup linearno nezavisnih vektora, ako je: a) $S = \{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\} \subseteq V^3$, b) $S = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\} \subseteq \mathcal{M}_{2,2}$, c) $S = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subseteq \mathbb{R}^2$? Obrazloži odgovor.*

Obzirom da vektori baze $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ generiraju vektorski prostor X, to znači da se svaki vektor $\mathbf{x} \in X$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, što se često zapisuje matrično sa

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Uočimo da matrični prikaz vektora ovisi o odabranoj bazi $\mathcal{B}$.

Zadatak 5.16 *Prikaži matrično u standardnoj bazi vektore: a) $\vec{i} - 4\vec{j} \in V^2$, b) $2\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k} \in V^3$, c) $t^2 - 3t + 2 \in \mathcal{P}_2$, d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}$, e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}$.*

Zadatak 5.17 *Ispitaj je li skup $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ baza prostora V^3, ako je $\vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.*

Sada se mogu uvesti dva alternativna kriterija za utvrđivanje je li neki skup $\mathcal{B} \subseteq X$ baza prostora X.

Teorem 5.18 *Neka je X vektorski prostor. Skup $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subseteq X$ je baza prostora X ako su vektori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ linearno nezavisni i ako je broj vektora $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ jednak dimenziji prostora X (tj. vrijedi $n = \dim X$).*

Prethodni teorem vrijedi, jer kad skup od n linearno nezavisnih vektora, pri čemu je $n = \dim X$, ne bi generirao cijeli vektorski prostor X, to bi značilo da u X postoji barem jedan vektor, označimo ga s $\mathbf{e}_{n+1}$, koji je linearno nezavisan od vektora $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, čime dobivamo skup od $n + 1$ linearno nezavisnih vektora u X. No, to se protivi činjenici da je $\dim X = n$, tj. da je najveći broj linearno nezavisnih vektora u X jednak n.

Teorem 5.19 *Neka je X vektorski prostor. Skup $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subseteq X$ je baza prostora X ako vektori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ generiraju cijeli prostor X i ako je broj vektora $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ jednak dimenziji prostora X (tj. vrijedi $n = \dim X$).*

Prethodni teorem vrijedi, jer kad vektori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ ne bi bili linearno nezavisni, pri čemu je $n = \dim X$, onda bismo linearno zavisne vektore mogli izbaciti, a ostali vektori bi još uvijek generirali cijeli prostor X. Dakle, preostali skup vektora bi bio baza, a imao bi manje od $\dim X = n$ vektora, što se protivi teoremu koji kaže da svaka baza ima točno $\dim X$ vektora.

Zadatak 5.20 *Zadani su vektori $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k}$. Ispitaj je li skup $\mathcal{B}$ baza prostora V^3, ako je: a) $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$, b) $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$.*

Zadatak 5.21 *Zadani su polinomi $p_1(t) = t - 2$, $p_2(t) = 2t + 3$ i $p_3(t) = -3t + 1$. Ispitaj je li skup $\mathcal{B}$ baza prostora $\mathcal{P}_1$, ako je: a) $\mathcal{B} = \{p_1(t), p_2(t)\}$, b) $\mathcal{B} = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$.*

Zadatak 5.22 *Zadane su uređene trojke $\mathbf{a} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 2, -3)$, $\mathbf{c} = (3, 2, -1)$ i $\mathbf{d} = (0, 3, 1)$. Ispitaj je li skup $\mathcal{B}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$, ako je: a) $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, b) $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, c) $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$.*

5.5 Promjena baze

Neka je X vektorski prostor dimenzije n, te neka su $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ dvije baze tog prostora. Uočimo da za vektor $\mathbf{x} \in X$ vrijedi

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n,$$

pri čemu je općenito $x_i \neq x'_i$, tj. koeficijenti prikaza jednog te istog vektora u dvjema različitim bazama se razlikuju. Prikaz vektora u odabranoj bazi može se zapisati matrično sa

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

Matrični prikaz vektora očito ovisi o odabranoj bazi.

Zadatak 5.23 *Neka je $\mathcal{B}_1$ standardna baza prostora V^3, a $\mathcal{B}_2 = \{\vec{i}+\vec{j}, \vec{i}-\vec{j}, \vec{k}\}$ i $\mathcal{B}_3 = \{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{j}+\vec{k}, \vec{k}\}$ dvije nestandardne baze prostora V^3. Zapiši matrično vektor $\overrightarrow{a} = 4\vec{i} + 4\vec{k}$ u bazama $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ i $\mathcal{B}_3$ redom.*

Obzirom da se matrični prikaz jednog te istog vektora razlikuje od baze do baze, prirodno se nameće pitanje kakva je veza između tih prikaza. Neka su $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ dvije baze vektorskog prostora X, pri čemu ćemo $\mathcal{B}$ nazivati "starom" bazom, a $\mathcal{B}'$ ćemo nazivati "novom" bazom. Neka su sada vektori nove baze $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ prikazani u staroj bazi $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ sa

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{n1}\mathbf{e}_n \\
\mathbf{e}'_2 &= t_{12}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{n2}\mathbf{e}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{e}'_n &= t_{1n}\mathbf{e}_1 + t_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{nn}\mathbf{e}_n.
\end{aligned}$$

Neka je $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ prikaz vektora $\mathbf{x}$ u staroj bazi $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, dok je $x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n$ prikaz tog istog vektora u novoj bazi $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n &= x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n = \\
&= x'_1(t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{n1}\mathbf{e}_n) + \\
&\quad + x'_2(t_{12}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{n2}\mathbf{e}_n) + \\
&\quad \ldots \\
&\quad + x'_n(t_{1n}\mathbf{e}_1 + t_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{nn}\mathbf{e}_n) \\
&= (t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + \ldots + t_{1n}x'_n)\mathbf{e}_1 + \\
&\quad + (t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + \ldots + t_{2n}x'_n)\mathbf{e}_2 + \\
&\quad \ldots \\
&\quad + (t_{n1}x'_1 + t_{n2}x'_2 + \ldots + t_{nn}x'_n)\mathbf{e}_n.
\end{aligned}$$

Dakle, mora biti

$$\begin{aligned} t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + \ldots + t_{1n}x'_n &= x_1 \\ t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + \ldots + t_{2n}x'_n &= x_2 \\ &\vdots \\ t_{n1}x'_1 + t_{n2}x'_2 + \ldots + t_{nn}x'_n &= x_n \end{aligned} \tag{5.1}$$

što je sustav n linearnih jednadžbi sa n nepoznanica koji se kraće može zapisati u obliku matrične jednadžbe

$$\mathbf{T}\mathbf{x}' = \mathbf{x}, \tag{5.2}$$

pri čemu je

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

matrica prijelaza iz stare baze u novu. Stupci matrice $\mathbf{T}$ predstavljaju prikaz vektora nove baze $\mathcal{B}'$ u staroj bazi $\mathcal{B}$. Obzirom da su vektori nove baze linearno nezavisni, slijedi da su stupci matrice $\mathbf{T}$ linearno nezavisni, što znači da je matrica prijelaza $\mathbf{T}$ uvijek regularna, pa ima inverz. Dakle, imamo i obratnu vezu, tj. vrijedi

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}'.$$

Zadatak 5.24 *Prikaži vektor* $\overrightarrow{a} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ *u bazi* $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\} = \{\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} - \vec{k}, \vec{i} + 2\vec{k}\}$.

Poglavlje 6

Linearni operatori

6.1 Definicija linearnog operatora

Definicija 6.1 *Neka su X i Y vektorski prostori. Preslikavanje $A : X \to Y$ sa svojstvom da za svaki $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$ i za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}'), && \textit{(aditivnost)} \\ A(\lambda\mathbf{x}) &= \lambda A(\mathbf{x}), && \textit{(homogenost)} \end{aligned}$$

zove se linearni operator.

Kažemo da operator $A : X \to Y$ ima svojstvo *linearnosti* ako za svaki $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$ i za svaki $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$A(\lambda\mathbf{x} + \lambda'\mathbf{x}') = \lambda A(\mathbf{x}) + \lambda' A(\mathbf{x}'). \qquad \text{(linearnost)}$$

Lako se vidi da je svojstvo linearnosti ekvivalentno paru svojstava aditivnosti i homogenosti. Dakle, posve ekvivalentno linearni operator se može definirati kao preslikavanje vektorskih prostora koje ima svojstvo linearnosti.

Obzirom da su linearni operatori funkcije (sa dodatnim svojstvom), mogu se zadavati pravilom preslikavanja.

Zadatak 6.2 *Ispitaj je li operator A linearan, ako je: a) $A : V^2 \to V^2$ definiran pravilom $A(x\vec{i} + y\vec{j}) = (x+2y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$, b) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiran pravilom $A(x,y) = (x+y^2, xy)$.*

Napomena 6.3 *Operator $A : X \to Y$ će biti linearan, ako je svaka koordinata slike nekog vektora linearna kombinacija koordinata samog vektora.*

6.2 Prikaz linearnog operatora matricom

Osim zadavanja pravilom preslikavanja, linearni operator se može zadati i matricom. U ovom poglavlju ćemo, dakle, uspostaviti vezu između linearnih operatora i matrica. Vezu je potrebno

uspostaviti u oba smjera, tj. potrebno je odgovoriti na pitanja: (1) ako imamo matricu kako dobiti odgovarajući linearni operator, te (2) ako imamo linearni operator kako dobiti odgovarajuću matricu?

No, prije nego što krenemo, potrebno je uočiti sljedeće: ako je operator linearan onda je on u potpunosti određen djelovanjem na bazi. Naime, neka je X vektorski prostor s bazom $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, te A linearni operator na prostoru X. Želimo odrediti djelovanje operatora A na proizvoljni vektor $\mathbf{x} \in X$. Vrijedi

$$A(\mathbf{x}) = A\left(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n\right) = x_1A(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_nA(\mathbf{e}_n).$$

Dakle, ako poznamo djelovanje operatora na vektorima baze $A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_n)$, onda znamo i kako taj operator djeluje na bilo kojem vektoru $\mathbf{x} \in X$. Posljedica ove činjenice je da se linearni operator može zadavati djelovanjem na vektorima baze, te da se jednakost dvaju operatora može utvrđivati iz jednakosti na vektorima baze.

Od matrice do linearnog operatora

Neka su X i Y vektorski prostori dimenzija $\dim X = n$ i $\dim Y = m$. Ako imamo matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}$, onda je linearni operator A definiran sa

$$\begin{aligned} &A : X \to Y \\ &A(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

Naime, ako pravilo preslikavanja operatora A zapišemo matrično

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=A(\mathbf{x})} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow y_1 \\ \\ \leftarrow y_i \\ \\ \leftarrow y_m \end{matrix}$$

onda vidimo da je svaka koordinata y_i vektora slike $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = A(\mathbf{x})$ linearna kombinacija koordinata x_i vektora točke $\mathbf{x} \in X$. Zaključujemo, dakle, da je ovako definiran operator A linearan.

Zadatak 6.4 *Linearni operatori $A : V^2 \to V^3$ i $B : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ zadani su u standardnim bazama matricama*

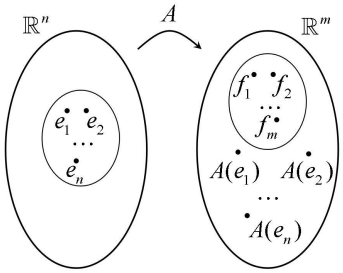
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Napiši im pravilo preslikavanja.

Od linearnog operatora do matrice

Neka su X i Y vektorski prostori dimenzija $\dim X = n$ i $\dim Y = m$, sa bazama $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ i $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$. Želimo pronaći matricu tog operatora. Podsjetimo se da je linearni operator u potpunosti određen djelovanjem na bazi $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ domene, tj. vektorima $A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_n)$. Obzirom da su vektori $A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_n)$ elementi kodomene (vidi Sliku **??**), tj. vektorskog prostora Y, to znači da se oni mogu prikazati u bazi $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ sa

$$\begin{aligned} A(\mathbf{e}_1) &= a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{m1}\mathbf{f}_m, \\ A(\mathbf{e}_2) &= a_{12}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{m2}\mathbf{f}_m, \\ &\vdots \\ A(\mathbf{e}_n) &= a_{1n}\mathbf{f}_1 + a_{2n}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{mn}\mathbf{f}_m. \end{aligned}$$



Slika 6.1: Djelovanje operatora A na vektorima baze.

Sada matricu $\mathbf{A}$ definiramo tako da koeficijente ovih prikaza pišemo kao stupce

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Da bismo utvrdili da je ovo dobra definicija, potrebno je pokazati da je $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ isto što i $A(\mathbf{x})$. Obzirom da je operator određen djelovanjem na bazi, dovoljno je jednakost dokazati za vektore baze. Mi ćemo dokazati $A(\mathbf{e}_1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1$, a za ostale vektore baze dokaz je analogan. Vrijedi

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + \ldots + a_{m1}\mathbf{f}_m = A(\mathbf{e}_1).$$

Napomena 6.5 *Važno je uočiti da prikaz operatora A matricom $\mathbf{A}$ ovisi o odabranom paru baza vektorskih prostora X i Y.*

Zadatak 6.6 *Linearni operator A definiran je pravilom: a) $A(x\vec{i} + y\vec{j}) = (x + 2y)\vec{i} + (3x - y)\vec{j}$, b) $A(x, y, z) = (x + y, y + z)$. Napiši matricu operatora A u paru standardnih baza.*

6.3 Promjena baze i prikaz operatora

Neka je A operator kojemu su domena i kodomena jednake, tj. neka je $A : X \to X$. Neka je $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza u vektorskom prostoru X, te neka je $\mathbf{A}$ matrica operatora A u bazi $\mathcal{B}$ (dakle, stupci matrice A su komponente vektora $A(\mathbf{e}_j)$ u odabranoj bazi $\mathcal{B}$). Neka je sada $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ neka druga baza u vektorskom prostoru X, te neka je $\mathbf{A}'$ matrica istog operatora A u bazi $\mathcal{B}'$. Prirodno se nameće pitanje koja je veza između matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ koje su prikaz istoga operatora A u dvjema različitim bazama prostora X. Bazu $\mathcal{B}$ ćemo nazivati "starom" bazom, a bazu $\mathcal{B}'$ "novom" bazom vektorskog prostora X.

Izrazimo kao prije vektore nove baze $\mathcal{B}'$ pomoću vektora stare baze $\mathcal{B}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{n1}\mathbf{e}_n, \\
\mathbf{e}'_2 &= t_{12}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{n2}\mathbf{e}_n, \\
&\vdots \\
\mathbf{e}'_n &= t_{1n}\mathbf{e}_1 + t_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{nn}\mathbf{e}_n
\end{aligned}$$

Tako dobivamo matricu

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

koja je matrica prijelaza iz stare baze u novu. Sada se djelovanje operatora $A(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ može matrično zapisati u staroj bazi sa $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$, te u novoj bazi sa $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{y}'$. Obzirom da su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ prikazi vektora $\mathbf{x}$ u staroj i novoj bazi, vrijedi $\mathbf{x} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}'$, a slično i za $\mathbf{y}$ i $\mathbf{y}'$ vrijedi $\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}'$. Uvrštavanjem ovih jednakosti u jednadžbu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$ dobivamo

$$\mathbf{T}\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{x}' \Rightarrow \mathbf{y}' = \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\mathbf{A}'}\mathbf{x}'.$$

Dakle, ovime smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 6.7 *Neka je* $\mathbf{A}$ *matrica operatora* A *u bazi* $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, *neka je* $\mathbf{A}'$ *matrica istog operatora* A *u bazi* $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$, *te neka je* $\mathbf{T}$ *matrica prijelaza iz stare baze* $\mathcal{B}$ *u novu bazu* $\mathcal{B}'$. *Tada vrijedi* $\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.

Obzirom da matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ koje odgovaraju operatoru A u dvjema bazama $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ imaju neka zajednička svojstva, uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 6.8 *Kažemo da su kvadratne matrice* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ slične, *ako postoji regularna matrica* $\mathbf{T}$ *takva da je* $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.

Dakle, matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ koje odgovaraju operatoru A u dvjema bazama $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ su slične matrice.

Zadatak 6.9 *Neka su* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *slične matrice. Pokaži da je tada* $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$ *i* $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B})$.

Za svojstvo koje je zajedničko sličnim matricama kažemo da je *invarijanta*. Obzirom da su matrice prikaza operatora u različitim bazama međusobno slične, onda se invarijante tih matrica mogu smatrati svojstvima operatora. Trag i determinanta su invarijante, pa ima smisla pričati o tragu i determinanti operatora.

Zadatak 6.10 *Ako je linearni operator A u standardnoj bazi prikazan matricom*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

napiši mu matricu $\mathbf{A}'$ u bazi $\mathcal{B} = \{\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}, 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}, -\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}\}$.

6.4 Algebra operatora

Kompozicija operatora $A : X \to Y$ i $B : Y \to Z$ je operator $C : X \to Z$ definiran sa $C = B \circ A$. Ako su operatori A i B linearni, onda za proizvoljne vektore $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$ i za proizvoljni $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x} + \mathbf{x}') &= B(A(\mathbf{x} + \mathbf{x}')) = B\left(A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}')\right) = \\ &= B\left(A(\mathbf{x})\right) + B\left(A(\mathbf{x}')\right) = C(\mathbf{x}) + C(\mathbf{x}'), \end{aligned}$$

pa operator $C = B \circ A$ ima svojstvo aditivnosti. Također vrijedi

$$C\left(\lambda\mathbf{x}\right) = B\left(A\left(\lambda\mathbf{x}\right)\right) = B(\lambda A(\mathbf{x})) = \lambda B(A(\mathbf{x})) = \lambda C(\mathbf{x}),$$

pa operator $C = B \circ A$ ima i svojstvo homogenosti. Dakle, ako su operatori A i B linearni, onda je linearan i operator $C = B \circ A$. Ovaj zaključak iskazujemo sljedećim teoremom.

Teorem 6.11 *Ako su operatori $A : X \to Y$ i $B : Y \to Z$ linearni, onda je operator $C : X \to Z$ definiran sa $C = B \circ A$ također linearan.*

Podsjetimo se, linearni operatori A i B mogu se prikazati matricama $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ redom. Obzirom da je kompozicija $C = B \circ A$ linearnih operatora A i B također linearni operator, to znači da se može prikazati matricom $\mathbf{C}$. Prirodno se nameće pitanje veze matrice $\mathbf{C}$ i matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$. Uočimo da vrijedi

$$C(\mathbf{x}) = B\left(A(\mathbf{x})\right) = B(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

što znači da se operator C može prikazati matricom $\mathbf{C}$ za koju vrijedi $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}$. Ovaj zaključak iskazujemo sljedećim teoremom.

Teorem 6.12 *Ako su linearni operatori $A : X \to Y$ i $B : Y \to Z$ zadani matricama $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ redom, onda je linearni operator $C : X \to Z$ definiran sa $C = B \circ A$ zadan matricom $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}$.*

Zadatak 6.13 *Zadani su operatori $A(x, y) = (x + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j}$ i $B(x\vec{i} + y\vec{j}) = (x + y) + (y + z)t + (x + z)t^2$. Odredi matricu operatora $C = B \circ A$!*

Sada kad smo definirali kompoziciju operatora, možemo razmatrati pojam bijektivnog operatora i njemu inverznog operatora. Tu ćemo razmatrati samo operatore $A : X \to X$ kojima je domena i kodomena jednaka (to su operatori koji imaju kvadratnu matricu).

Najprije, ako je operator $A : X \to X$ linearan, onda se on može prikazati kvadratnom matricom $\mathbf{A}$. Ako operator A ima uz to i dodatno svojstvo bijektivnosti, prirodno se nameće pitanje znači li to da i njegova matrica $\mathbf{A}$ ima neko dodatno "lijepo" svojstvo. Uočimo sljedeće: ako je operator $A : X \to X$ bijekcija, to znači da za svaki $\mathbf{y} \in X$ postoji točno jedan $\mathbf{x} \in X$ takav da je $A(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Ovaj uvjet znači da linearni sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ mora imati jedinstveno rješenje za svaki $\mathbf{y} \in X$, a iz teorije linearnih sustava znamo da to vrijedi ako i samo ako je kvadratna matrica $\mathbf{A}$ regularna. Zaključak ovog razmatranja iskazujemo sljedećim teoremom.

Teorem 6.14 *Linearni opeator $A : X \to X$ je bijekcija ako i samo ako je matrica operatora $\mathbf{A}$ regularna.*

Obzirom da se kriterij bijektivnosti operatora oslanja na regularnost matrice kojom je operator prikazan, često bijektivni operator nazivamo *regularnim operatorom*, a operator koji nije bijekcija nazivamo *singularnim operatorom*.

Nadalje, ako je linearni operator $A : X \to X$ regularan, onda postoji inverzni operator $A^{-1} : X \to X$ koji je također regularan. Postavlja se pitanje je li operator A^{-1} također linearan, te ako jest - što mu je matrica? Uočimo da za svaki $\mathbf{y} = A(\mathbf{x})$ i $\mathbf{y}' = A(\mathbf{x}')$ i za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} A^{-1}(\mathbf{y} + \mathbf{y}') &= A^{-1}(A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}')) = A^{-1}(A(\mathbf{x} + \mathbf{x}')) = \\ &= \mathbf{x} + \mathbf{x}' = A^{-1}(\mathbf{y}) + A^{-1}(\mathbf{y}'), \end{aligned}$$

pa operator A^{-1} ima svojstvo aditivnosti. Također, vrijedi

$$A^{-1}(\lambda \mathbf{y}) = A^{-1}(\lambda A(\mathbf{x})) = A^{-1}(A(\lambda \mathbf{x})) = \lambda \mathbf{x} = \lambda A^{-1}(\mathbf{y}),$$

pa operator A^{-1} ima i svojstvo homogenosti. Zaključujemo da je inverz A^{-1} linearnog operatora A također linearan, što izričemo sljedećim teoremom.

Teorem 6.15 *Ako je linearni operator $A : X \to X$ regularan, onda je inverzni operator $A^{-1} : X \to X$ također linearan.*

Linearni operator $A : X \to X$ može prikazati kvadratnom matricom $\mathbf{A}$. Obzirom da je inverzni operator A^{-1} također linearan, slijedi da se i on može prikazati matricom, pa se postavlja se pitanje koja je veza te matrice i matrice $\mathbf{A}$. Uočimo da za svaki $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = A(\mathbf{x})$ vrijedi

$$A^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} = \{\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

što znači da je operator A^{-1} zadan matricom $\mathbf{A}^{-1}$ koja je inverzna matrici $\mathbf{A}$. Ovaj zaključak izričemo sljedećim teoremom.

Teorem 6.16 *Ako je regularno linearni operator $A : X \to X$ definiran matricom $\mathbf{A}$, onda je linearni operator A^{-1} definiran matricom $\mathbf{A}^{-1}$.*

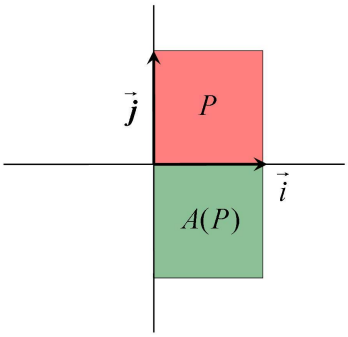
Zadatak 6.17 *Ispitaj je li operator $A : V^2 \to V^2$ definiran pravilom $A(x\vec{i} + y\vec{j}) = (x - 2y)\vec{i} + (3y - x)\vec{j}$ regularan. Ako jest, odredi mu inverzni operator.*

6.5 Primjeri operatora u ravnini i prostoru

Sada ćemo navesti neke primjere linearnih operatora koji se često javljaju u praksi. Najčešće su to operatori ravnine ili operatori prostora.

Simetrija ravnine obzirom na os x.

Neka je $A : V^2 \to V^2$ definiran sa $A(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}'$ pri čemu je $\overrightarrow{a}'$ vektor simetričan vektoru $\overrightarrow{a}$ obzirom na os x. Iz geometrijskih razloga je jasno da je operator linearan. Djelovanje operatora simetrije A na jediničnom kvadratu kojeg razapinju vektori $\vec{i}$ i $\vec{j}$ prikazano je na Slici 6.2.



Slika 6.2: Djelovanje operatora simetrije na jediničnom kvadratu.

Matricu operatora A simetrije ravnine V^2 obzirom na os x dobivamo iz djelovanja operatora na vektorima baze $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Vrijedi

$$\left.\begin{array}{c} A(\vec{i}) = \vec{i} \\ A(\vec{j}) = -\vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

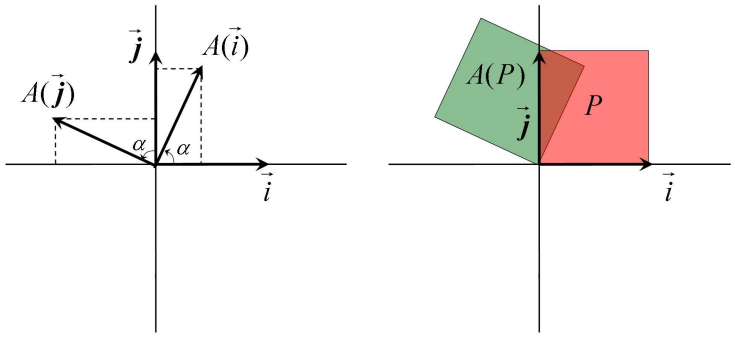
Na sličan način može se odrediti i operator simetrije obzirom na os y.

Rotacija ravnine oko ishodišta za kut α.

Neka je $A : V^2 \to V^2$ definiran sa $A(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}'$ pri čemu je $\overrightarrow{a}'$ vektor dobiven rotacijom vektora $\overrightarrow{a}$ za kut α. Iz geometrijskih razloga je jasno da je operator linearan. Djelovanje operatora na vektorima baze $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, odnosno na jediničnom kvadratu kojeg vektori baze razapinju, prikazan je na Slici 6.3.

Matricu operatora A rotacije ravnine V^2 za kut α dobivamo iz djelovanja operatora na vektorima baze $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Vrijedi

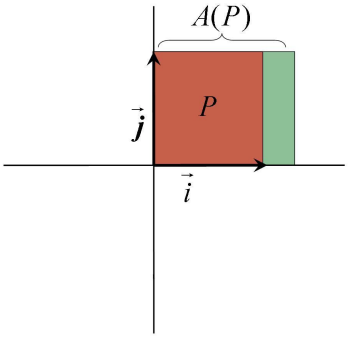
$$\left.\begin{array}{c} A(\vec{i}) = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j} \\ A(\vec{j}) = -\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$



Slika 6.3: Operator rotacije ravnine V^2 za kut α.

Operator homotetije u ravnini.

Neka je $A : V^2 \to V^2$ definiran sa $A(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}'$ pri čemu je vektor $\overrightarrow{a}'$ dobiven rastezanjem vektora $\overrightarrow{a}$ duž osi x za λ. Tako definiran operator ravnine naziva se homotetija ravnine. Iz geometrijskih razloga je jasno da je operator homotetije linearan. Operatori homotetije ilustriran je Slikom 6.4.



Slika 6.4: Djelovanje operatora homotetije - rastezanje vektora duž osi x za $\lambda = 1.3$.

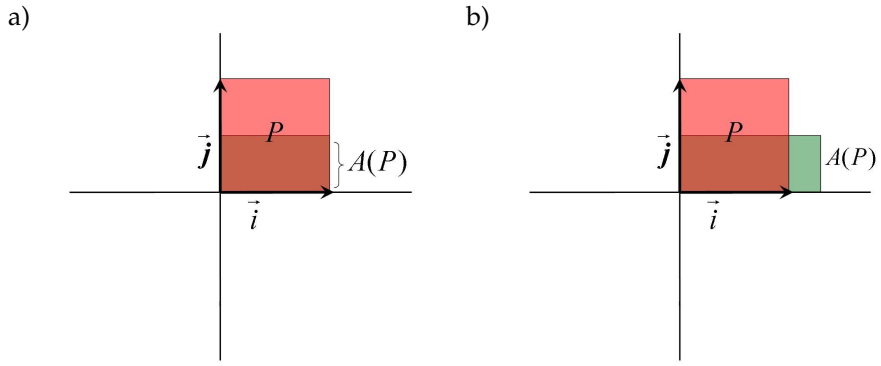
Matricu operatora A rastezanja ravnine V^2 duž osi x za λ dobivamo iz djelovanja operatora na vektorima baze $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Vrijedi

$$\left.\begin{array}{c} A(\vec{i}) = \lambda\vec{i} \\ A(\vec{j}) = \vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Posve analogno se može definirati operator rastezanja duž osi y, te duž obje osi. Djelovanje takvih operatora na jediničnom kvadratu ilustrirano je Slikom 6.5.

Razmatranjem djelovanja ovih operatora na vektorima baze $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ dobije se da su njihove matrice

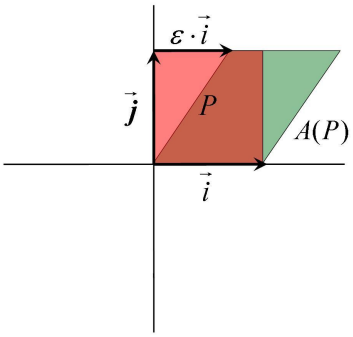
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \text{ te } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$



Slika 6.5: Djelovanje operatora homotetije: a) duž osi y za $\mu = 0.5$, b) duž x za $\lambda = 1.3$ i duž y za $\mu = 0.5$.

Operator zakošenja u ravnini.

Neka je $A : V^2 \to V^2$ definiran sa $A(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}'$ pri čemu je $\overrightarrow{a}'$ vektor dobiven zakošenjem vektora $\overrightarrow{a}$ za ε. Tako definiran operator naziva se operatorom zakošenja ravnine V^2. Iz geometrijskih razloga je jasno da je operator linearan. Djelovanje operatora zakošenja na jediničnom kvadratu ilustrirano je Slikom 6.6.



Slika 6.6: Djelovanje operatora zakošenja $(\epsilon = 0.7)$ na jediničnom kvadratu.

Matricu operatora A zakošenja ravnine V^2 za ε dobivamo iz djelovanja operatora zakošenja na vektorima baze $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Vrijedi

$$\left.\begin{array}{c} A(\vec{i}) = \vec{i} \\ A(\vec{j}) = \varepsilon\vec{i} + \vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Posve analogno mogu se definirati operatori simetrije u prostoru (obzirom na koordinatnu os ili ravninu), rotacije obzirom na os, homotetije duž osi, zakošenja, itd. Za primjer, navedimo neke

od njih.

Simetrija prostora obzirom na os y

Ova simetrija je linearni operator $A : V^3 \to V^3$ određen sa

$$\left.\begin{array}{c} A(\vec{i}) = -\vec{i} \\ A(\vec{j}) = \vec{j} \\ A(\vec{k}) = -\vec{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Simetrija prostora obzirom na koordinatnu ravninu xy

Ova simetrija je linearni operator $A : V^3 \to V^3$ određen sa

$$\left.\begin{array}{c} A(\vec{i}) = \vec{i} \\ A(\vec{j}) = \vec{j} \\ A(\vec{k}) = -\vec{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rotacija prostora oko osi y za kut α

Ova rotacija je linearni operator $A : V^3 \to V^3$ određen sa

$$\left.\begin{array}{l} A(\vec{i}) = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{k} \\ A(\vec{j}) = \vec{j} \\ A(\vec{k}) = -\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Poglavlje 7

Svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti

Znamo da prikaz operatora matricom ovisi o odabranom paru baza. Matrica istog operatora u jednom paru baza može biti vrlo kompliciranа, a u nekom drugom paru baza vrlo jednostavna (dijagonalna). Dakle, u interesu nam je pronaći par baza u kojem će operator imati dijagonalnu matricu (ako takav par baza uopće postoji).

7.1 Definicija i osnovna svojstva

Neka je X vektorski prostor, $A : X \to X$ linearni operator, te neka je $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza prostora X sa svojstvom da je

$$A(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \; A(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \; \ldots, \; A(\mathbf{e}_n) = \lambda_n \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Tada je matrica tog operatora očito

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dakle, tražimo vektore $\mathbf{x} \in X$ sa svojstvom $A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$. Ako uspijemo pronaći dovoljno takvih vektora da sastavimo bazu, onda smo pronašli bazu u kojoj će matrica operatora biti dijagonalna.

Definicija 7.1 *Neka je X vektorski prostor, te neka je $A : X \to X$ linearni operator. Kažemo da je vektor $\mathbf{x} \neq 0$* svojstveni vektor *operatora A ako postoji broj $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$. Broj $\lambda \in \mathbb{R}$ naziva se* svojstvena vrijednost *koja odgovara svojstvenom vektoru $\mathbf{x}$.*

Uočimo da po definiciji svojstveni vektor mora biti različit od nul-vektora, ali svojstvena vrijednost može biti jednaka nula. Nadalje, neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}') = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}' = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{x}'), \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha A(\mathbf{x}) = \alpha\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ovo znači da su onda vektori $\mathbf{x}+\mathbf{x}'$ i $\alpha\mathbf{x}$ također svojstveni vektori sa svojstvenom vrijednošću λ. Ovime smo pokazali da je skup svojstvenih vektora s istom svojstvenom vrijednošću λ vektorski prostor, tj. potprostor vektorskog prostora X.

Definicija 7.2 *Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se* spektar *operatora A i označava sa $\sigma(A)$.*

7.2 Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Nakon što smo definirali svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore, postavlja se pitanje kako ih odrediti. Uočimo da se jednakost $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ može matrično zapisati sa

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

a ova matrična jednadžba se može dalje transformirati na sljedeći način

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{I}\mathbf{x}, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dakle, svojstveni vektori su netrivijalna rješenja $\mathbf{x}$ homogenog sustava $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Obzirom da je sustav homogen, netrivijalno rješenje postoji ako i samo ako je matrica sustava $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ singularna, tj. ako vrijedi

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Ova jednadžba se zove *karakteristična jednadžba* operatora A. Tražene svojstvene vrijednosti su dakle rješenja karakteristične jednadžbe. Može se pokazati da je lijeva strana jednadžbe, tj. izraz $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, polinom u varijabli λ kojeg nazivamo *karakteristični polinom* operatora A. Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime, ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ matrični prikazi operatora A u različitim bazama, onda su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ slične, tj. vrijedi $\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. No onda vrijedi i
$$\mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T}$$
pa su i matrice $\mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I}$ i $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$, što znači da imaju istu determinantu (a to je karakteristični polinom).

2. *Svojstvene vrijednosti operatora ne ovise o odabiru baza.* Naime, obzirom da karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza, onda ni njegove nultočke (a to su svojstvene vrijednosti operatora A) ne ovise o odabiru baza.

3. *Stupanj karakterističnog polinoma jednak je redu n matrice A*. Obzirom da se varijabla λ javlja u matrici $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ samo na dijagonali (n puta), slijedi da je λ^n najveća potencija varijable λ koja se javlja u razvoju determinante $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$.

Zadatak 7.3 *Odredi svojstvene vrijednosti za:*

$$a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix},\ b)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ c)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Obzirom da su svojstvene vrijednosti nultočke karakterističnog polinoma, a karakteristični polinom je polinom stupnja n, po osnovnom teoremu algebre znamo da karakteristični polinom ima točno n nul-točaka. Međutim, osnovni teorem algebre kaže i da nul-točke polinoma mogu biti realne ili kompleksne, te da mogu biti jednostruke ili višestruke. Zaključujemo da nam nije uvijek svih n nul-točaka karakterističnog polinoma prihvatljivo kao svojstvena vrijednost, što znači da operator može imati najviše n realnih i različitih svojstvenih vrijednosti, ali ih može imati i manje od n.

Također, uočimo sljedeće: broj $\lambda = 0$ svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako vrijedi

$$\det(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I}) = \det(\mathbf{A}) = 0,$$

što znači da je operator A singularan. Ovo možemo iskazati sljedećom propozicijom.

Propozicija 7.4 *Operator A je singularan ako i samo ako je 0 njegova svojstvena vrijednost.*

7.3 Određivanje svojstvenih vektora i svojstvenih vrijednosti

Svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore određujemo tako da:

1. rješavamo karakterističnu jednadžbu $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ čija rješenja su svojstvene vrijednosti λ_i operatora A,
2. za svaku svojstvenu vrijednost λ_i tražimo rješenje $\mathbf{x}$ sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ koje je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ_i.

Uočimo da će sustav $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sasvim sigurno imati parametarsko rješenje za svaku svojstvenu vrijednost λ_i. Naime, takav sustav sigurno ima rješenje jer je homogen. Pitanje je jedino je li to rješenje jedinstveno ili parametarsko. No obzirom da smo vrijednost λ_i birali tako bude $\det(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}) = 0$, po Teoremu 4.19 slijedi da rješenje sustava nije jedinstveno nego parametarsko.

7.4 Dijagonalizacija operatora

Teorem 7.5 *Linearni operator se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora. Matrični prikaz linearnog operatora u bazi svojstvenih vektora je dijagonalna matrica kojoj su na dijagonali svojstvene vrijednosti operatora.*

Obzirom da se linearni operator može dijagonalizirati samo ako postoji baza svojstvenih vektora, postavlja se pitanje pod kojim uvjetima takva baza postoji. Djelomičan odgovor na to pitanje daje nam sljedeći teorem.

Teorem 7.6 *Svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su međusobno linearno nezavisni.*

Ovaj teorem ima jednu važnu posljedicu. Naime, neka je $A : X \to X$ operator, te neka je n dimenzija prostora X. Da bi postojala baza svojstvenih vektora, moramo pronaći točno n linearno nezavisnih svojstvenih vektora. Karakteristični polinom je stupnja n, što znači da ima točno n nultočaka koje mogu biti 1) realne ili kompleksne, te 2) jednostruke ili višestruke. Nultočke karakterističnog polinoma su svojstvene vrijednosti, pa u slučaju kad su sve nultočke realne i jednostruke slijedi da imamo n različitih svojstvenih vrijednosti kojima prema prethodnom teoremu odgovara n linearno nezavisnih svojstvenih vektora. To znači da postoji baza svojstvenih vektora, pa se operator može dijagonalizirati.

Uočimo da ovime tek djelomično odgovaramo na pitanje, jer još uvijek ne znamo što je sa slučajevima kad je barem neka nultočka karakterističnog polinoma kompleksna ili višestruka. Odgovor na pitanje postoji li u tim slučajevima baza svojstvenih vektora utvrđuje se postupkom dijagonaliziranja operatora.

Postupak dijagonaliziranja operatora provodi se sljedećim koracima.

1. Pronađemo rješenja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ karakteristične jednadžbe $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ i ta rješenja su svojstvene vrijednosti operatora A.
2. Za svaku svojstvenu vrijednost λ_i rješavamo homogeni sustav $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ čija rješenja su svojstveni vektori operatora A.
3. Ako postoji n linearno nezavisnih svojstvenih vektora operatora A, onda se operator A može dijagonalizirati, pri čemu se dijagonalni prikaz dobiva u bazi svojstvenih vektora. To znači da se matrica prijelaza $\mathbf{T}$ dobije zapisivanjem svojstvenih vektora u stupce, dok se matrični prikaz operatora A u novoj bazi svojstvenih vektora dobiva kao

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

   Ako, pak, operator A nema n linearno nezavisnih svojstvenih vektora, onda zaključujemo da se operator A ne može dijagonalizirati.

7.5 Skalarni produkt

U klasičnom vektorskom prostoru V^3 definirali smo skalarni produkt vektora. Obzirom da smo u prethodnim poglavljima poopćili pojam vektorskog prostora, sada želimo poopćiti i pojam skalarnog produkta (tj. želimo definirati skalarni produkt u općenitom vektorskom prostoru X dimenzije n).

Skalarni produkt u V^3. Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ vektori u klasičnom vektorskom prostoru. Skalarni produkt vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ definiran je sa

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{a}\right| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi$$

pri čemu je $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Ova formula nije zgodna za poopćavanje na višedmenzionalne vektorske prostore, jer u višedimenzionalnim prostorima ne možemo zorno predočiti ni pojam duljine ni pojam kuta vektora.

Međutim, u bazi vektora $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ u kojoj vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ imaju prikaz

$$\overrightarrow{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \text{ i } \overrightarrow{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

vrijedi sljedeća formula za skalarni produkt

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Ova formula je puno pogodnija za poopćavanje pojma skalarnog produkta na višedimenzionalne prostore. Nakon što poopćimo pojam skalarnog produkta, poopćit ćemo i pojmove duljine vektora, te kuta među vektorima. Podsjetimo se da za duljinu $\left|\overrightarrow{a}\right|$ i za kut $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ vrijedi

$$\left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \text{ i } \cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right| \left|\overrightarrow{b}\right|},$$

što su formule zgodne poopćavanje tih pojmova.

Skalarni produkt u vektorskom prostoru X **dimenzije** n. Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dva vektora iz vektorskog prostora X s matričnim prikazom

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Skalarni produkt vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ definiran je sa

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}.$$

Uočimo da vrijednost ovako definiranog skalarnog prostora ovisi o odabranoj bazi. Sada pomoću definiranog skalarnog produkta možemo definirati duljinu vektora i kut između vektora u višedimenzionalnom prostoru (gdje zor ne pomaže) po analogiji na definicije iz trodimenzionalnog prostora. *Duljina* (kažemo još i *norma*) vektora $\mathbf{x}$ definirana je sa

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{y})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Kut φ između vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ definiran je sa

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}.$$

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (*ortogonalni*) ako vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$. Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ *normiran* ako je $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Četiri najvažnija svojstva skalarnog produkta su sljedeća.

1. *Pozitivnost.* Za svaki vektor $\mathbf{x} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0$, pri čemu je $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. *Homogenost.* Za svaka dva vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ i za svaki skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(\alpha\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y}) = \alpha\,(\mathbf{x}|\mathbf{y})$$

3. *Komutativnost.* Za sve vektore $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$.

4. *Aditivnost.* Za svaka tri vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ vrijedi

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}|\mathbf{z}) = (\mathbf{x}|\mathbf{z}) + (\mathbf{y}|\mathbf{z})\,.$$

Svojstva aditivnosti i homogenosti skalarnog produkta zovu se jednim imenom svojstvo *linearnosti* skalarnog produkta.

Definicija 7.7 *Kažemo da su vektori* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ ortonormirani*, ako su svaka dva vektora međusobno ortogonalni i ako je svaki od tih vektora normiran.*

Definicija 7.8 Ortonormirana baza *vektorskog prostora je svaka baza koju sačinjavaju ortonormirani vektori.*

7.6 Simetrične matrice

Definicija 7.9 *Kažemo da je matrica* $\mathbf{A}$ *simetrična ako vrijedi* $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Uočimo da simetrične mogu biti samo kvadratne matrice, jer kod matrica koje nisu kvadratne matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}^T$ nisu istog tipa, pa ne mogu biti jednake. Nadalje, simetrija kod kvadratnih matrica znači simetriju obzirom na glavnu dijagonalu.

Zadatak 7.10 *Ispitaj koja od sljedećih matrica je simetrična*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Podsjetimo se, kod općenitih kvadratnih matrica vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   (a) realne ili kompleksne,
   (b) jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,
3. baza svojstvenih vektora možda postoji.

Kod simetričnih kvadratnih matrica, neka od ovih svojstava se "proljepšavaju". Vrijede sljedeći teoremi.

Teorem 7.11 *Ako je* $\mathbf{A}$ *simetrična matrica, onda su sve njene svojstvene vrijednosti realne.*

Uočimo da ovaj teorem jamči realnost svojstvenih vrijednosti simetrične matrice, no ne i njihovu različitost (tj. jednostrukost).

Teorem 7.12 *Ako je* $\mathbf{A}$ *simetrična matrica, onda su svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima međusobno okomiti.*

Uočimo da su okomiti vektori sigurno linearno nezavisni, što znači da je okomitost posebno "lijep" slučaj linearne nezavisnosti.

Prethodnim dvama teoremima smo "proljepšali" prva dva svojstva. Treće svojstvo se kod simetričnih matrica također proljepšava, ali da bismo mogli iskazati kako, potrebno je uvesti definiciju ortonormirane matrice.

Definicija 7.13 *Kažemo da je kvadratna matrica* $\mathbf{S}$ ortonormirana, *ako su njeni stupci ortonormirani vektori.*

Teorem 7.14 *Ako je kvadratna matrica* $\mathbf{S}$ *ortonormirana, onda je* $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.

Sada smo u mogućnosti iskazati sljedeći teorem koji nam daje odgovor na pitanja o dijagonalizaciji simetrične matrice.

Teorem 7.15 (Spektralni teorem) *Svaka simetrična matrica* $\mathbf{A}$ *ima točno* n *realnih svojstvenih vrijednosti* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *(brojeći višestrukosti, tj. neke mogu biti jednake) kojima odgovara točno* n *linearno nezavisnih svojstvenih vektora (koji tvore bazu), pa se* $\mathbf{A}$ *može dijagonalizirati, tj. slična je dijagonalnoj matrici*

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Štoviše, barem jedna baza svojstvenih vektora je ortonormirana, što znači da postoji ortonormirana matrica prijelaza $\mathbf{S}$ *takva da je* $\mathbf{A}' = \mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S}$.

Sada možemo rezultate prethodnih teorema sistematizirati, te usporediti sa analognim rezultatima za općenite kvadratne matrice. Dakle, za simetrične kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   (a) samo realne,
   (b) jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su ortogonalni,
3. baza svojstvenih vektora sigurno postoji (štoviše, barem jedna takva baza je ortonormirana).

Poglavlje 8

Krivulje i plohe drugog reda

8.1 Kvadratne forme

Definicija 8.1 *Neka je* $\mathbf{A}$ *kvadratna matrica reda* n*, te neka je* X *vektorski prostor dimenzije* n*. Funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$ *definirana sa*

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x}|\mathbf{x})$$

naziva se kvadratna forma reda n.

Koristeći svojstvo komutativnosti skalarnog produkta, te vezu skalarnog produkta i matričnog množenja, kvadratnu formu možemo matrično prikazati sa

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}|\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

Ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

onda kvadratna forma ima oblik

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2. \end{aligned}$$

Ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

onda kvadratna forma ima oblik

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3. \end{aligned}$$

U slučaju matrica malog reda ($n = 2, 3$) često umjesto x_1, x_2, x_3 pišemo x, y, z.

Zadatak 8.2 *Odredi kvadratnu formu matrica*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dakle, ako je zadana matrica vrlo lako se odredi odgovarajuća kvadratna forma. Sada se prirodno nameće pitanje o obratnom postupku, tj. kako iz zadane kvadratne forme odrediti matricu čija je to forma.

Zadatak 8.3 *Odredi matricu za formu: a)* $x^2 - 5xy + 3y^2$, *b)* $x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 3xz - 5yz$.

Uočimo da sve matrice iz prethodnog primjera imaju iste elemente na dijagonali te zbrojeve $a_{ij} + a_{ji}$ elemenata simetričnih obzirom na djagonalu. Element a_{ii} dijagonale će u kvadratnoj formi biti koeficijent uz x_i^2, dok će zbroj $a_{ij} + a_{ji}$ u kvadratnoj formi biti koeficijent uz 'mješoviti' član $x_i x_j$. Iz ovoga slijedi da za zadanu kvadratnu formu postoji mnogo matrica koje joj odgovaraju, ali postoji samo jedna simetrična matrica koja joj odgovara. Zato ćemo se u daljnjem razmatranju ograničiti na simetrične matrice.

Zadatak 8.4 *Odredi simetričnu matricu za kvadratnu formu:*

$$a)\ x^2 - 2y^2 + 6xy, \ b)\ x^2 + 3y^2 - z^2 + xy + 2xz - 4yz.$$

Definicija 8.5 *Kažemo da je kvadratna forma* kanonska *ako je oblika* $f(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$.

Dakle, kvadratna forma je kanonska ako ne sadrži mješovite umnoške poput $x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, \ldots$ Očito je da kanonskoj formi odgovara dijagonalna matrica. Prirodno se postavlja pitanje je li moguće neku kvadratnu formu svesti na kanonski oblik.

Zadatak 8.6 *Odredi kanonski oblik forme* $f(x, y) = 2x^2 + 8xy + 5y^2$.

Iz prethodnog primjera zaključujemo da se barem neke kvadratne forme mogu svesti na kanonski oblik supstitucijom varijabli. Sada se prirodno nameću sljedeća pitanja.

1. Može li se svaka kvadratna forma supstitucijom svesti na kanonski oblik?
2. Ako se kvadratna forma može svesti na kanonski oblik:
   (a) je li taj oblik jedinstven, te
   (b) kako ga odrediti?

Da bismo odgovorili na ova pitanja, razmotrimo općenitu kvadratnu formu $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ pri čemu je $\mathbf{A}$ simetrična matrica. Ako je $\mathbf{A}$ dijagonalna matrica, forma je u kanonskom obliku. Ako $\mathbf{A}$ nije dijagonalna matrica, onda je želimo svesti na dijagonalnu supstitucijom $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}'$. Takvom supstitucijom dobivamo

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{S}\mathbf{x}')^T\mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{x}') = (\mathbf{x}')^T(\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}',$$

što će biti kanonska forma ako i samo ako je matrica $\mathbf{S}^T\mathbf{AS}$ dijagonalna. Dakle, kvadratna forma se može svesti na kanonski oblik ako i samo ako se simetrična matrica $\mathbf{A}$ može dijagonalizirati sa $\mathbf{S}^T\mathbf{AS}$, a po spektralnom teoremu znamo da je to uvijek moguće barem na jedan način (a ponekad i na više načina). Zaključujemo da se svaka kvadratna forma može svesti na kanonski oblik, taj oblik nije jedinstven, a određujemo ga dijagonalizacijom simetrične matrice $\mathbf{A}$ pomoću ortonormirane matrice $\mathbf{S}$. Time smo odgovorili na postavljena pitanja.

8.2 Polinomi više varijabli

Kvadratna forma je zbroj kvadratnih pribrojnika, međutim općenita jednadžba krivulje ili plohe sadrži i linearne pribrojnike, te konstantu. Da bismo iskazali definiciju krivulje i plohe drugog reda, potreban nam je pojam polinoma drugog reda sa više varijabli.

Definicija 8.7 *Neka je* $\mathbf{A}$ *kvardatna matrica reda* n, $\mathbf{b}$ *stupčani vektor duljine* n, *te neka je* $c \in \mathbb{R}$. Polinom $p(x_1, \ldots, x_n)$ *drugog stupnja sa* n *varijabli definiran je sa*

$$p(x_1, \ldots, x_n) = (\mathbf{Ax}|\mathbf{x}) + (\mathbf{b}|\mathbf{x}) + c$$

pri čemu je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T$ *vektor nepoznanica.*

Uočimo da se formula kojom je definiran polinom može matrično zapisati kao

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}^T\mathbf{Ax} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c.$$

Nama će najzanimljiviji biti polinomi u dvije ili tri varijable ($n = 2$ ili $n = 3$), u kojem slučaju ćemo nepoznanice označavati sa x, y, z umjesto x_1, x_2, x_3.

8.3 Krivulje i plohe drugog reda

Definicija 8.8 Krivulja drugog reda *je skup točaka ravnine definiran sa* $\{(x, y) : (\mathbf{Ax}|\mathbf{x}) + (\mathbf{b}|\mathbf{x}) + c = 0\}$ *gdje je* $\mathbf{A}$ *kvardatna matrica reda* 2, $\mathbf{b}$ *stupčani vektor duljine* 2, *te* $c \in \mathbb{R}$.

Uočimo da se jednadžba krivulje drugog reda može matrično zapisati kao

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0.$$

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

onda jednadžbu krivulje drugog reda možemo raspisati kao

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c &= 0, \\ a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c &= 0. \end{aligned}$$

Ovime smo dobili opći oblik jednadžbe krivulje drugog reda.

Zadatak 8.9 *Odredi jednadžbu krivulje drugog reda zadane sa*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \; i \; c = 11.$$

Uočimo da iz općenite jednadžbe ne možemo lako prepoznati o kojoj krivulji drugog reda je riječ.

Definicija 8.10 Ploha drugog reda *je skup točaka ravnine definiran sa* $\{(x, y, z) : (\mathbf{Ax}|\mathbf{x}) + (\mathbf{b}|\mathbf{x}) + c = 0\}$ *gdje je* $\mathbf{A}$ *kvardatna matrica reda* 3, $\mathbf{b}$ *stupčani vektor duljine* 3, *te* $c \in \mathbb{R}$.

Uočimo da se jednadžba krivulje drugog reda može matrično zapisati kao

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0.$$

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \; \text{i} \; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

onda jednadžbu plohe drugog reda možemo raspisati kao

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + c =$$
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz + \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

Zadatak 8.11 *Odredi jednadžbu plohe drugog reda zadane sa*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \; i \; c = -9.$$

Uočimo da iz općenite jednadžbe ne možemo lako prepoznati o kojoj krivulji drugog reda je riječ. Ako je krivulja ili ploha zadana općenitom jednadžbom, onda je teško prepoznati o kojoj je krivulji ili plohi riječ. Zato uvodimo pojam kanonskog oblika jednadžbe krivulje ili plohe.

Definicija 8.12 *Ako u jednadžbi* $(\mathbf{Ax}|\mathbf{x}) + (\mathbf{b}|\mathbf{x}) + c = 0$ *krivulje (odnosno plohe) drugog reda vrijedi da je* $\mathbf{A}$ *dijagonalna matrica,* $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, *te* $c = \pm 1$ *ili* $c = 0$, *onda kažemo da je jednadžba u* kanonskom obliku.

Obzirom da se kvadratna forma uvijek može zadati simetričnom matricom koja se može dijagonalizirati, a linearni pribrojnici se zatim mogu supstitucijama eliminirati, zaključujemo da se jednadžba svake krivulje odnosno plohe može svesti na kanonski oblik.

8.4 Klasifikacija krivulja drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe krivulje

$$a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

na kanonski oblik ortonormiranom transformacijom je sljedeći:

1. Određujemo kanonski oblik kvadratne forme u ortonormiranoj bazi, čime jednadžba postaje

   $$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \mu_1x' + \mu_2y' + \gamma = 0,$$

   pri čemu su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice kvadratne forme.

2. Zatim supstitucijama

   $$x'' = x' + \frac{\mu_1}{2\lambda_1},\ y'' = y' + \frac{\mu_2}{2\lambda_2}$$

   eliminiramo linearne članove (svođenje izraza $\lambda_1(x')^2 + \mu_1x'$ i $\lambda_2(y')^2 + \mu_2y'$ na potpuni kvadrat).

Uočimo da prva transformacija odgovara rotaciji koordinatnog sustava tako da koordinatne osi budu paralelene s glavnim osima krivulje drugog reda. Druga transformacija odgovara translaciji koordinatnog sustava tako da se ishodište koordinatnog sustava poklopi sa 'središtem' krivulje.

Obzirom da su koeficijenti jednadžbe u rotiranoj formi zapravo svojstvene vrijednosti matrice A kojom je određena forma, krivulje drugog reda klasificiramo na sljedeći način:

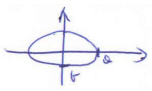
A) obje svojstvene vrijednosti su različite od nula,

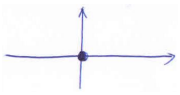
B) jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

Razmotrimo sada koje krivulje spadaju u ove kategorije.

A) Obje svojstvene vrijednosti su različite od nula.

1. Ako su λ_1 i λ_2 istog predznaka, onda imamo:

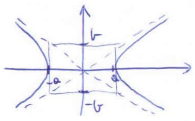
   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - elipsa 

   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ - jedna točka 

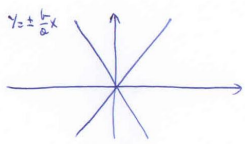
   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - prazan skup

2. Ako su λ_1 i λ_2 suprotnog predznaka, onda imamo:

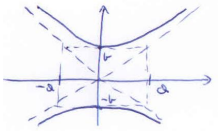
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - hiperbola



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ - ukršteni pravci

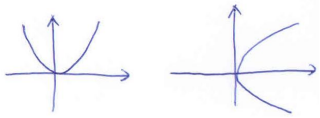


$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ - hiperbola

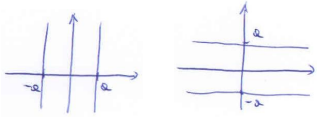


B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

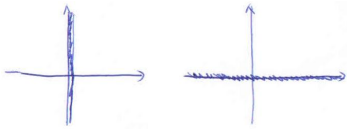
$x^2 = 2py \quad (y^2 = 2px)$ - parabola



$x^2 = a^2 \quad (y^2 = a^2)$ - paralelni pravci



$x^2 = 0 \quad (y^2 = 0)$ - jedan pravac



$x^2 = -a^2 \quad (y^2 = -a^2)$ - prazan skup

8.5 Klasifikacija ploha drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe plohe

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz + \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

na kanonski oblik ortonormiranom transformacijom je sljedeći.

1. Određujemo kanonski oblik kvadratne forme, čine jednadžba postaje

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + \mu_1x' + \mu_2y' + \mu_3z' + \gamma = 0$$

pri čemu su λ_1, λ_2 i λ_3 svojstvene vrijednosti matrice kvadratne forme.

2. Zatim supstitucijama

$$x'' = x' + \frac{\mu_1}{2\lambda_1},\ y'' = y' + \frac{\mu_2}{2\lambda_2},\ z'' = z' + \frac{\mu_3}{2\lambda_3}$$

eliminiramo linearne članove (svođenje na potpuni kvadrat).

Slično kao kod krivulja, prva transformacija odgovara rotaciji koordinatnog sustava, a druga translaciji.

Obzirom da su koeficijenti jednadžbe u rotiranoj formi zapravo svojstvene vrijednosti matrice **A** kojom je određena forma, plohe drugog reda klasificiramo na sljedeći način:

A) sve tri svojstvene vrijednosti su različite od nula,

B) jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula,

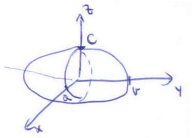
C) dvije svojestvene vrijednosti su jednake nula

Razmotrimo sada koje plohe spadaju u ove kategorije.

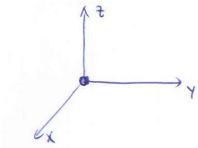
A) Sve tri svojstvene vrijednosti su različite od nula.

1. Sve tri svojstvene vrijednosti su istog predznaka.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{- elipsoid}$$



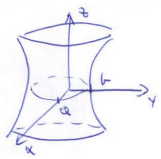
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{- jedna točka}$$



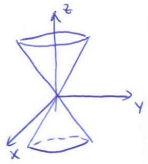
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{- prazan skup}$$

2. Jedna svojstvena vrijednost je različitog predznaka od ostalih.

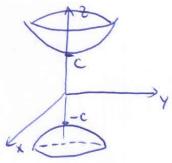
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ - jednoplošni eliptički hiperboloid



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$ - konus



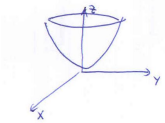
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ - dvoplošni eliptički hiperboloid



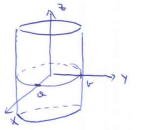
B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

1. Dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su istog predznaka.

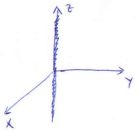
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$$ - eliptički paraboloid



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ - eliptički cilindar



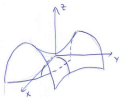
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$ - jedan pravac



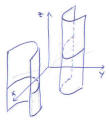
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$ - prazan skup

2. Dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su suprotnog predznaka.

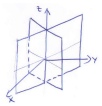
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ - hiperbolički paraboloid (sedlo)



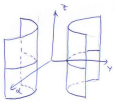
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - hiperbolički cilindar



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ - par ukrštenih ravnina

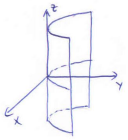


$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ - hiperbolički cilindar

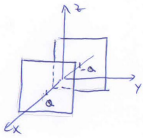


C) Dvije svojestvene vrijednosti su jednake nula.

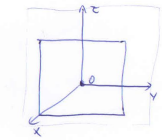
$x^2 = 2py$ - parabolički cilindar



$x^2 = a^2$ - par paralelnih ravnina



$x^2 = 0$ - jedna ravnina



$x^2 = -a^2$ - prazan skup

Bibliografija

[1] N. Elezović, Linearna algebra, Element, Zagreb, 2001.

[2] N. Elezović, A. Aglić, Linearna algebra - Zbirka zadataka, Element, Zagreb, 2001.

[3] I. Slapničar, Matematika 1, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu, Split, 2002.

[4] I. Slapničar, Matematika 2, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu, Split, 2017.

[5] I. Slapničar, J. Barić, M. Ninčević, Matematika 1 - zbirka zadataka, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu, Split, 2010.

[6] I. Slapničar, N. Jakovčević Stor, J. Barić, I. Mirošević, Matematika 2 - zbirka zadataka, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu, Split, 2010.

[7] N. Uglešić, Viša matematika I, http://mapmf.pmfst.unist.hr/matematika/Nastavni%20materijali/visa_matematika.pdf.