Krivulje i plohe drugog reda

Jelena Sedlar

Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

Kvadratna forma

Kvadratna forma

Podsjetimo se:

Kvadratna forma

Podsjetimo se:

- kanonska jednadžba elipse

Kvadratna forma

Podsjetimo se:

- kanonska jednadžba elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Kvadratna forma

Podsjetimo se:

- kanonska jednadžba elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

Kvadratna forma

Podsjetimo se:

- kanonska jednadžba elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

- jednadžba pomaknute elipse

Kvadratna forma

Podsjetimo se:

- kanonska jednadžba elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

- jednadžba pomaknute elipse

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$

Kvadratna forma

Podsjetimo se:

- kanonska jednadžba elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

- jednadžba pomaknute elipse

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 \underbrace{-2x - 16y}_{\text{pomak}} + 13 = 0$$

Kvadratna forma

Podsjetimo se:

- kanonska jednadžba elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

- jednadžba pomaknute elipse

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 \underbrace{-2x - 16y}_{\text{pomak}} + 13 = 0$$

- jednadžba zarotirane elipse

Kvadratna forma

Podsjetimo se:

- kanonska jednadžba elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

- jednadžba pomaknute elipse

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 \underbrace{-2x - 16y}_{\text{pomak}} + 13 = 0$$

- jednadžba zarotirane elipse

$$x^2 \underbrace{+xy}_{\text{rotacija}} + y^2 - 1 = 0$$

Kvadratna forma

Podsjetimo se:

- kanonska jednadžba elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

- jednadžba pomaknute elipse

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 \underbrace{-2x - 16y}_{\text{pomak}} + 13 = 0$$

- jednadžba zarotirane elipse

$$x^2 \underbrace{+xy}_{\text{rotacija}} + y^2 - 1 = 0$$

- jednadžba pomaknute zarotirane elipse

Kvadratna forma

Podsjetimo se:

- kanonska jednadžba elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

- jednadžba pomaknute elipse

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 \underbrace{-2x - 16y}_{\text{pomak}} + 13 = 0$$

- jednadžba zarotirane elipse

$$x^2 \underbrace{+xy}_{\text{rotacija}} + y^2 - 1 = 0$$

- jednadžba pomaknute zarotirane elipse

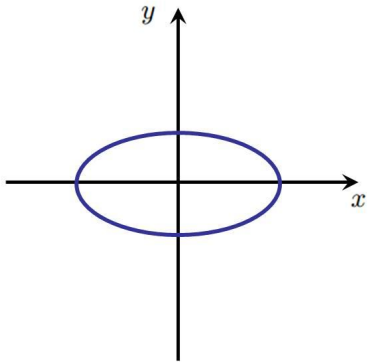
$$x^2 \underbrace{+xy}_{\text{rotacija}} + y^2 \underbrace{-4x - 5y}_{\text{pomak}} + 6 = 0$$

Kvadratna forma

Geometrijska interpretacija:

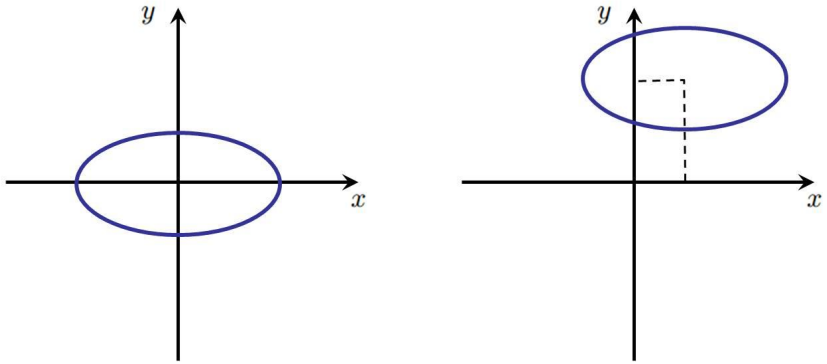
Kvadratna forma

Geometrijska interpretacija:



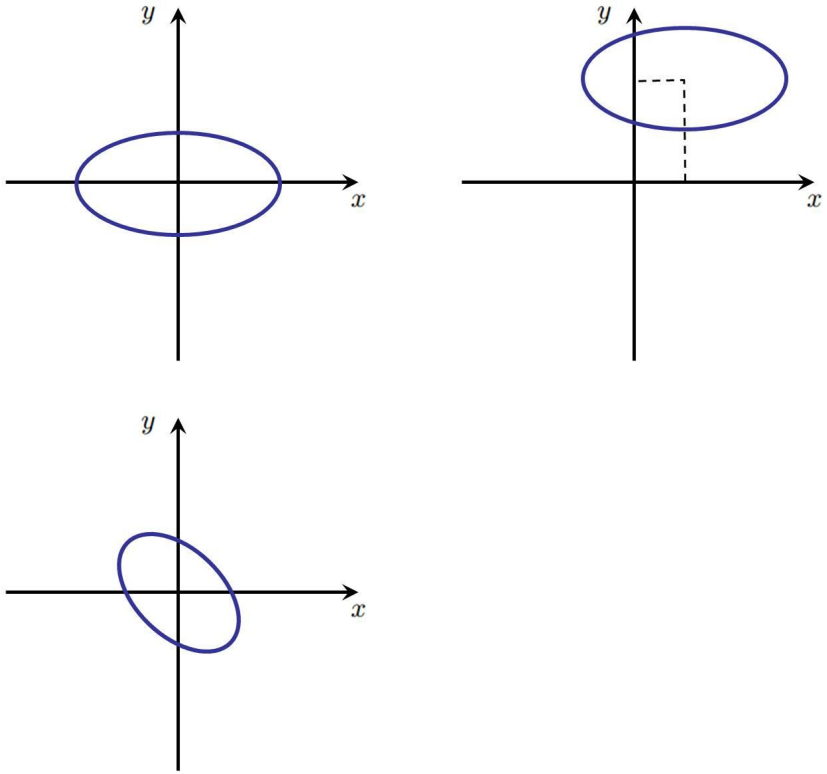
Kvadratna forma

Geometrijska interpretacija:



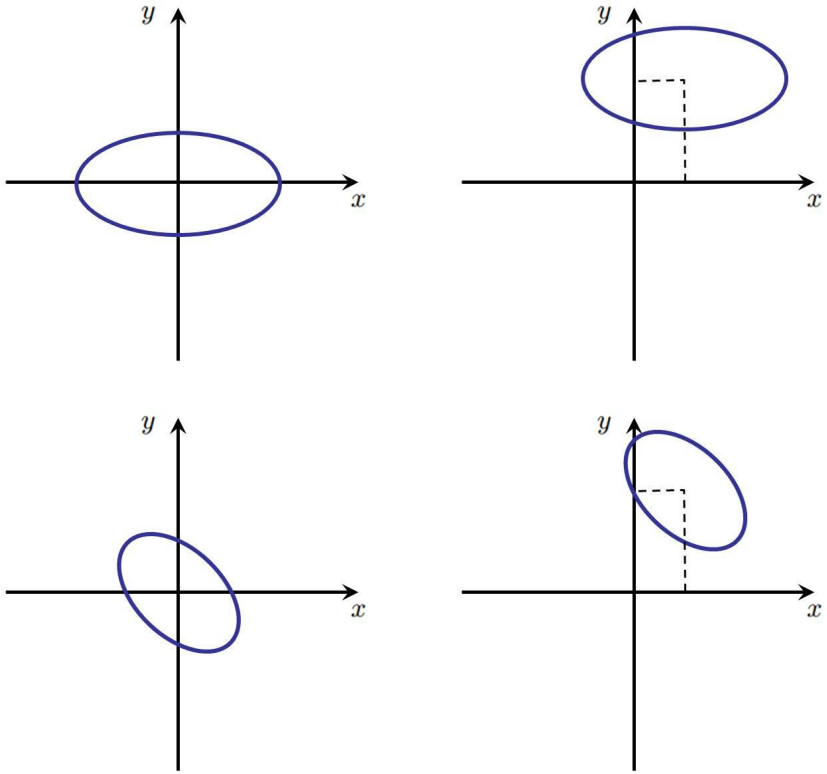
Kvadratna forma

Geometrijska interpretacija:



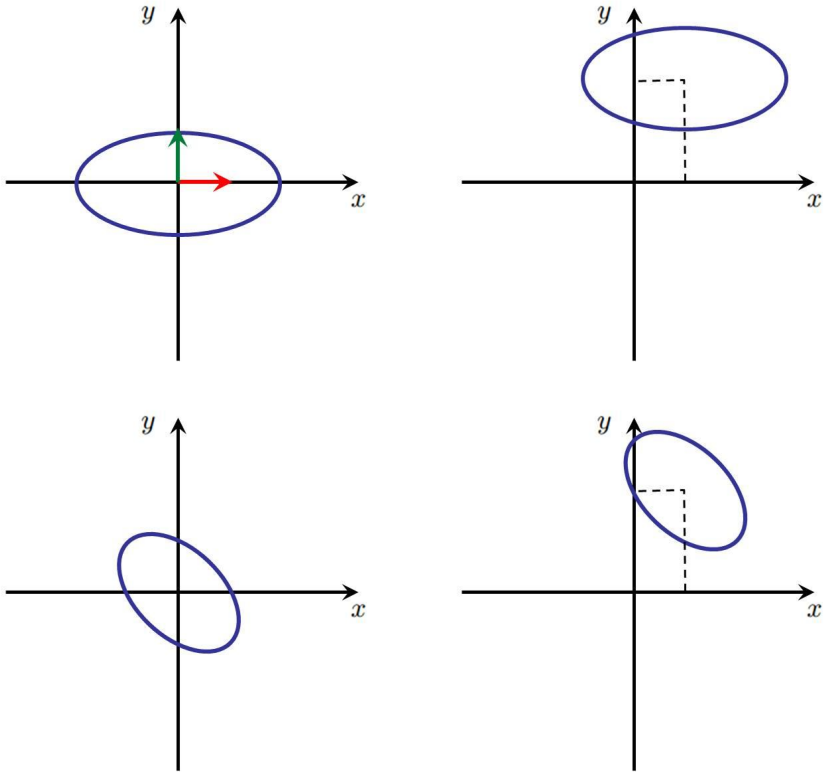
Kvadratna forma

Geometrijska interpretacija:



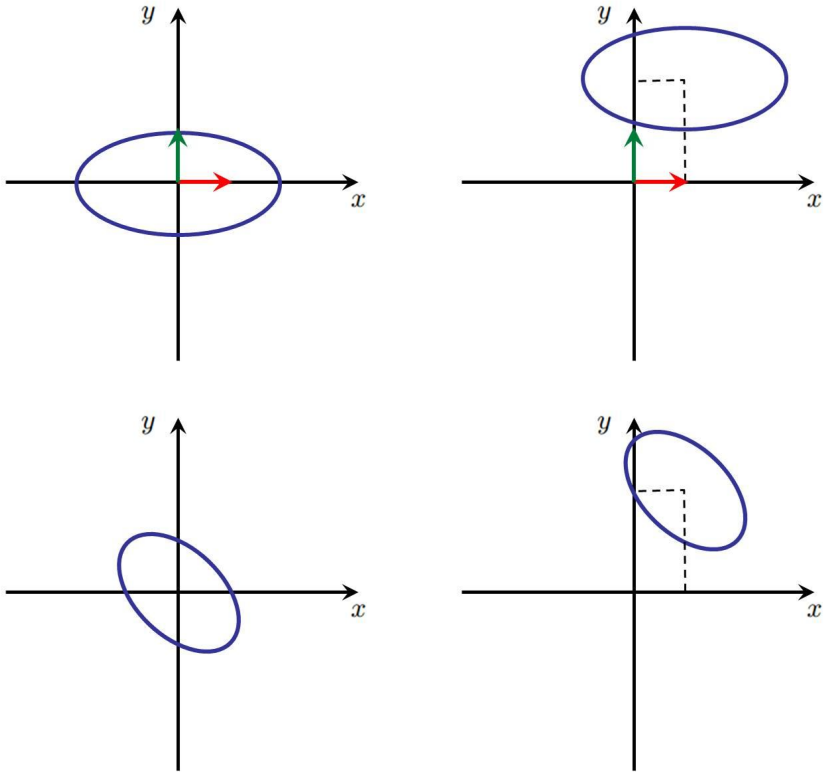
Kvadratna forma

Geometrijska interpretacija:



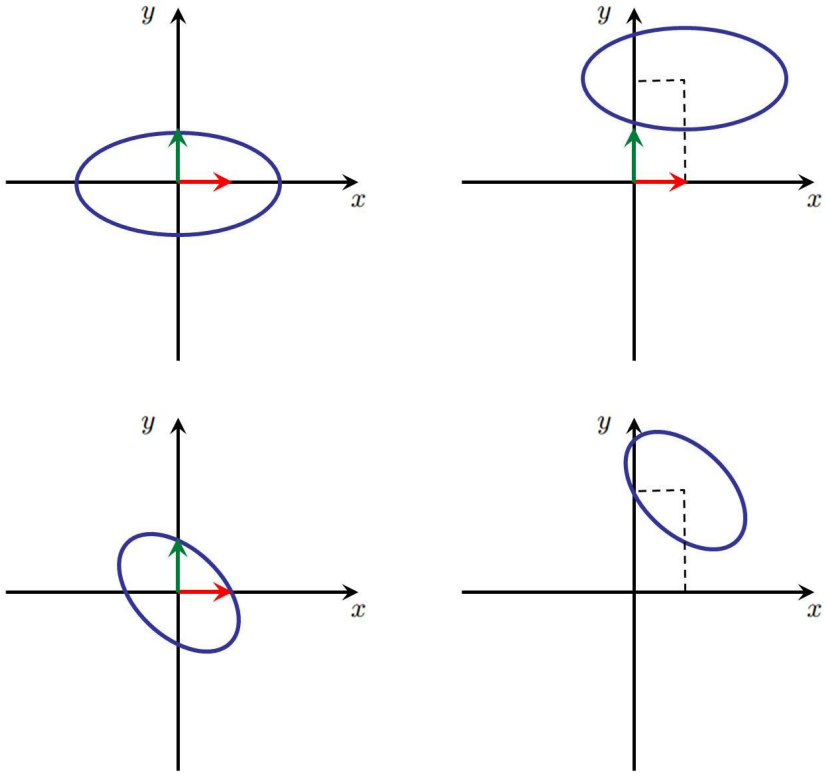
Kvadratna forma

Geometrijska interpretacija:



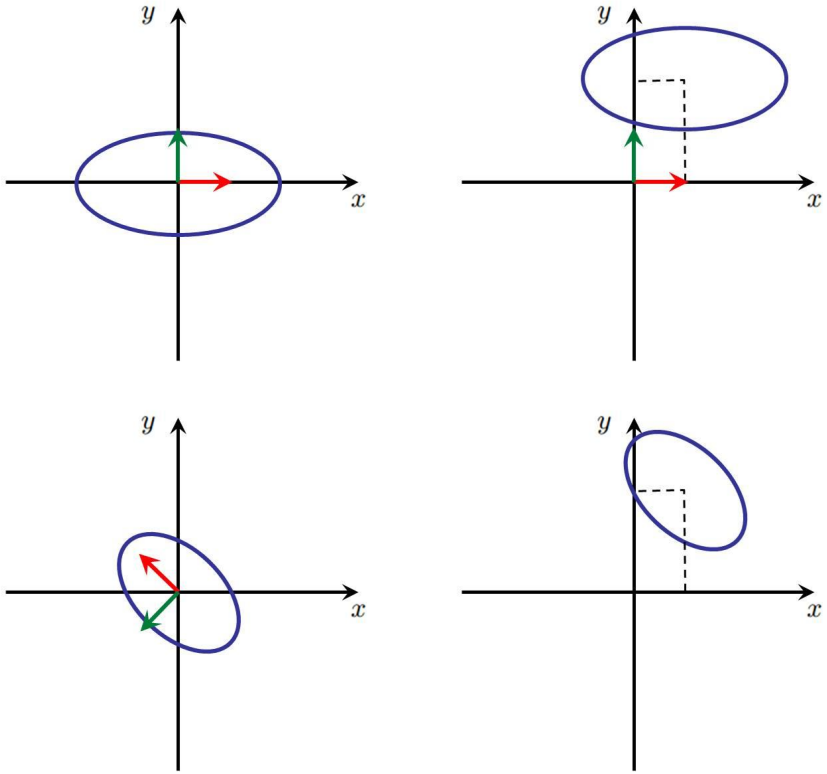
Kvadratna forma

Geometrijska interpretacija:



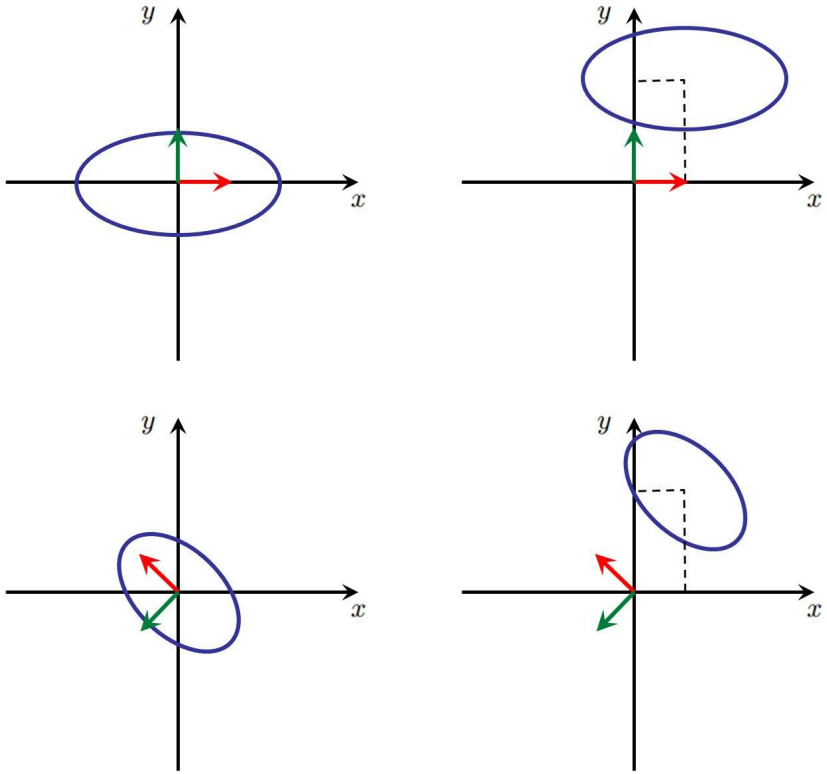
Kvadratna forma

Geometrijska interpretacija:



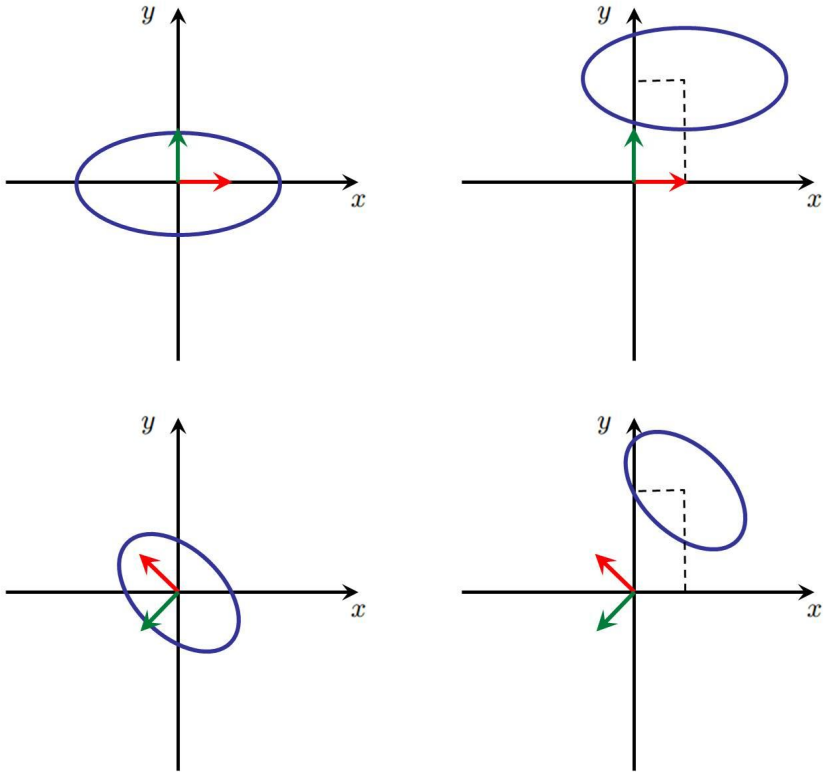
Kvadratna forma

Geometrijska interpretacija:



Kvadratna forma

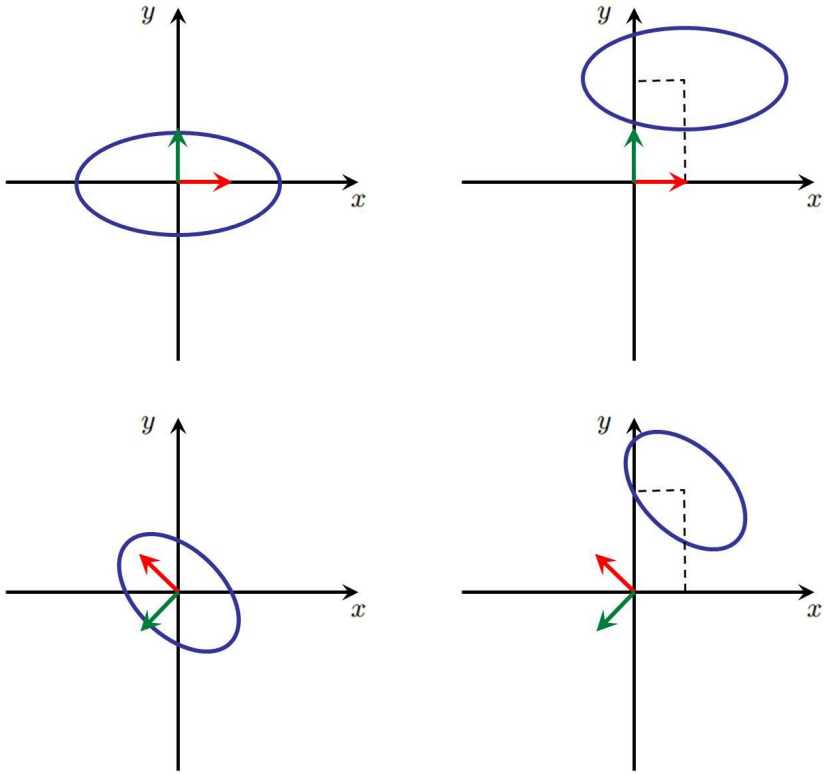
Geometrijska interpretacija:



Zaključak.

Kvadratna forma

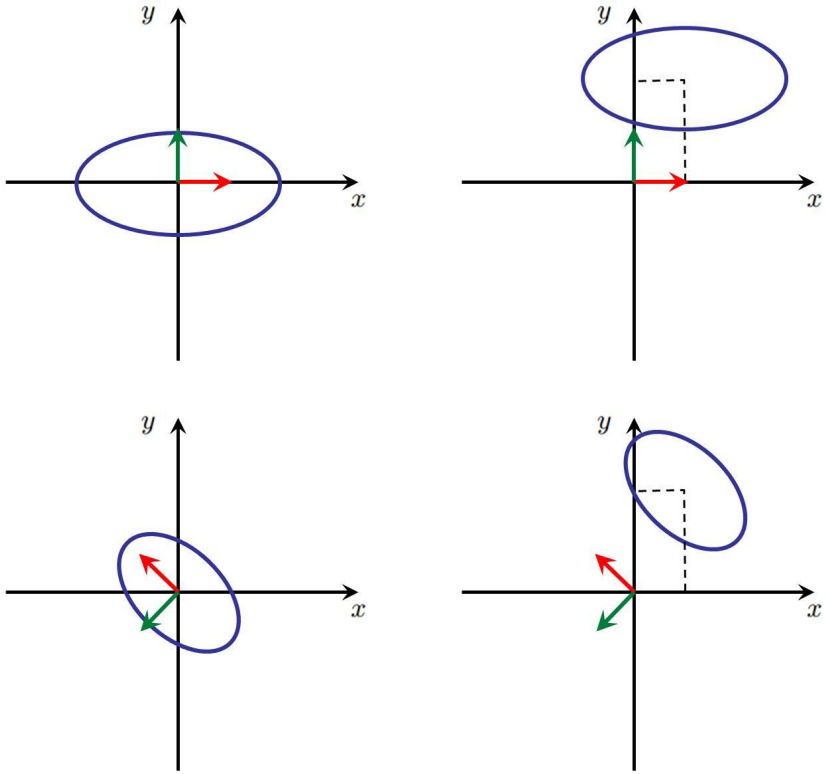
Geometrijska interpretacija:



Zaključak. Zarotirana elipsa **promjenom baze** prostora V^2

Kvadratna forma

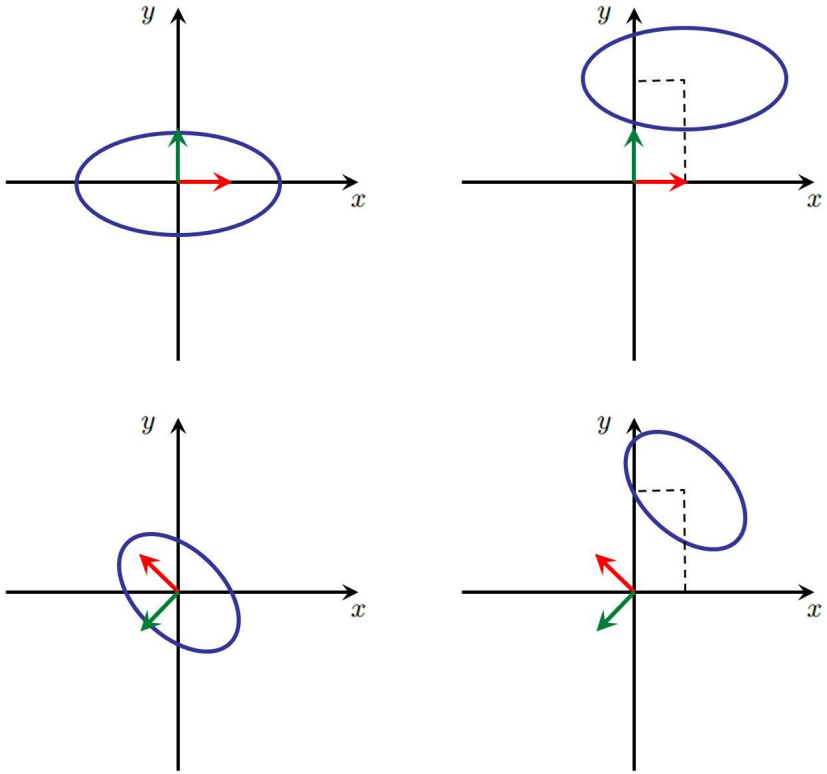
Geometrijska interpretacija:



Zaključak. Zarotirana elipsa **promjenom baze** prostora V^2 prelazi u kanonski položaj.

Kvadratna forma

Geometrijska interpretacija:



Zaključak. Zarotirana elipsa **promjenom baze** prostora V^2 prelazi u kanonski položaj. Jako je važno da nova baza bude **ortonormirana**!

Kvadratna forma

Uočimo da je primjer jednadžbe neke:

Kvadratna forma

Uočimo da je primjer jednadžbe neke:

- krivulje drugog reda

Kvadratna forma

Uočimo da je primjer jednadžbe neke:

- krivulje drugog reda

$$\underbrace{2x^2 + 3y^2 + 2xy}_{\text{kvadratna forma}} + \underbrace{5x + 6y}_{\text{linearna forma}} - \underbrace{7}_{\text{konst.}} = 0$$

Kvadratna forma

Uočimo da je primjer jednadžbe neke:

- krivulje drugog reda

$$\underbrace{2x^2 + 3y^2 + 2xy}_{\text{kvadratna forma}} + \underbrace{5x + 6y}_{\text{linearna forma}} - \underbrace{7}_{\text{konst.}} = 0$$

- plohe drugog reda (će na sličan način biti)

Kvadratna forma

Uočimo da je primjer jednadžbe neke:

- krivulje drugog reda

$$\underbrace{2x^2 + 3y^2 + 2xy}_{\text{kvadratna forma}} + \underbrace{5x + 6y}_{\text{linearna forma}} - \underbrace{7}_{\text{konst.}} = 0$$

- plohe drugog reda (će na sličan način biti)

$$\underbrace{x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xy - 3xz + 5yz}_{\text{kvadratna forma}} + \underbrace{x - 3y + 2z}_{\text{linearna forma}} + \underbrace{1}_{\text{konst.}} = 0$$

Kvadratna forma

Uočimo da je primjer jednadžbe neke:

- krivulje drugog reda

$$\underbrace{2x^2 + 3y^2 + 2xy}_{\text{kvadratna forma}} + \underbrace{5x + 6y}_{\text{linearna forma}} - \underbrace{7}_{\text{konst.}} = 0$$

- plohe drugog reda (će na sličan način biti)

$$\underbrace{x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xy - 3xz + 5yz}_{\text{kvadratna forma}} + \underbrace{x - 3y + 2z}_{\text{linearna forma}} + \underbrace{1}_{\text{konst.}} = 0$$

Mi ćemo kvadratnu formu:

Kvadratna forma

Uočimo da je primjer jednadžbe neke:

- krivulje drugog reda

$$\underbrace{2x^2 + 3y^2 + 2xy}_{\text{kvadratna forma}} + \underbrace{5x + 6y}_{\text{linearna forma}} - \underbrace{7}_{\text{konst.}} = 0$$

- plohe drugog reda (će na sličan način biti)

$$\underbrace{x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xy - 3xz + 5yz}_{\text{kvadratna forma}} + \underbrace{x - 3y + 2z}_{\text{linearna forma}} + \underbrace{1}_{\text{konst.}} = 0$$

Mi ćemo kvadratnu formu:

- zapisivati matrično pomoću simetrične matrice $\mathbf{A}$,

Kvadratna forma

Uočimo da je primjer jednadžbe neke:

- krivulje drugog reda

$$\underbrace{2x^2 + 3y^2 + 2xy}_{\text{kvadratna forma}} + \underbrace{5x + 6y}_{\text{linearna forma}} - \underbrace{7}_{\text{konst.}} = 0$$

- plohe drugog reda (će na sličan način biti)

$$\underbrace{x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xy - 3xz + 5yz}_{\text{kvadratna forma}} + \underbrace{x - 3y + 2z}_{\text{linearna forma}} + \underbrace{1}_{\text{konst.}} = 0$$

Mi ćemo kvadratnu formu:

- zapisivati matrično pomoću simetrične matrice $\mathbf{A}$,
- prevoditi na kanonski oblik (eliminacija mješovitih umnožaka)

Kvadratna forma

Uočimo da je primjer jednadžbe neke:

- krivulje drugog reda

$$\underbrace{2x^2+3y^2+2xy}_{\text{kvadratna forma}}+\underbrace{5x+6y}_{\text{linearna forma}}-\underbrace{7}_{\text{konst.}}=0$$

- plohe drugog reda (će na sličan način biti)

$$\underbrace{x^2+4y^2+2z^2+2xy-3xz+5yz}_{\text{kvadratna forma}}+\underbrace{x-3y+2z}_{\text{linearna forma}}+\underbrace{1}_{\text{konst.}}=0$$

Mi ćemo kvadratnu formu:

- zapisivati matrično pomoću simetrične matrice $\mathbf{A}$,
- prevoditi na kanonski oblik (eliminacija mješovitih umnožaka) dijagonalizacijom matrice $\mathbf{A}$ u ortonormiranoj bazi.

Kvadratna forma

Neka je:

Kvadratna forma

Neka je:

- X vektorski prostor dimenzije n,

Kvadratna forma

Neka je:

- X vektorski prostor dimenzije n,
- $\mathbf{x} \in X$ neki vektor,

Kvadratna forma

Neka je:

- X vektorski prostor dimenzije n,
- $\mathbf{x} \in X$ neki vektor,
- $A : X \to X$ linearni operator.

Kvadratna forma

Neka je:

- X vektorski prostor dimenzije n,
- $\mathbf{x} \in X$ neki vektor,
- $A : X \to X$ linearni operator.

Prisjetimo se: $\mathbf{x}$ i A se mogu matrično prikazati sa

Kvadratna forma

Neka je:

- X vektorski prostor dimenzije n,
- $\mathbf{x} \in X$ neki vektor,
- $A : X \to X$ linearni operator.

Prisjetimo se: $\mathbf{x}$ i A se mogu matrično prikazati sa

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

Kvadratna forma

Neka je:

- X vektorski prostor dimenzije n,
- $\mathbf{x} \in X$ neki vektor,
- $A : X \to X$ linearni operator.

Prisjetimo se: $\mathbf{x}$ i A se mogu matrično prikazati sa

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Kvadratna forma

Neka je:

- X vektorski prostor dimenzije n,
- $\mathbf{x} \in X$ neki vektor,
- $A : X \to X$ linearni operator.

Prisjetimo se: $\mathbf{x}$ i A se mogu matrično prikazati sa

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicija.

Kvadratna forma

Neka je:

- X vektorski prostor dimenzije n,
- $\mathbf{x} \in X$ neki vektor,
- $A : X \to X$ linearni operator.

Prisjetimo se: $\mathbf{x}$ i A se mogu matrično prikazati sa

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicija. Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda n,

Kvadratna forma

Neka je:

- X vektorski prostor dimenzije n,
- $\mathbf{x} \in X$ neki vektor,
- $A : X \to X$ linearni operator.

Prisjetimo se: $\mathbf{x}$ i A se mogu matrično prikazati sa

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicija. Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda n, te $\mathbf{x}$ vektor tipa $n \times 1$.

Kvadratna forma

Neka je:

- X vektorski prostor dimenzije n,
- $\mathbf{x} \in X$ neki vektor,
- $A : X \to X$ linearni operator.

Prisjetimo se: $\mathbf{x}$ i A se mogu matrično prikazati sa

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicija. Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda n, te $\mathbf{x}$ vektor tipa $n \times 1$. Kvadratna forma matrice $\mathbf{A}$ definirana je sa $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$.

Kvadratna forma

Za $n = 2$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Kvadratna forma

Za $n = 2$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} =$$

Kvadratna forma

Za $n = 2$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

Kvadratna forma

Za $n = 2$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2$$

Kvadratna forma

Za $n = 2$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2$$

Za $n = 3$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Kvadratna forma

Za $n = 2$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2$$

Za $n = 3$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} =$$

Kvadratna forma

Za $n = 2$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2$$

Za $n = 3$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Kvadratna forma

Za $n = 2$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2$$

Za $n = 3$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 +$$

Kvadratna forma

Za $n = 2$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2$$

Za $n = 3$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 +$$
$$+ (a_{12} + a_{21})x_1x_2 +$$

Kvadratna forma

Za $n = 2$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2$$

Za $n = 3$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 +$$

$$+ (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 +$$

Kvadratna forma

Za $n = 2$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2$$

Za $n = 3$ imamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 +$$

$$+ (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3$$

Kvadratna forma

Napomena. Kod matrica reda 2 i 3 umjesto x_1, x_2, x_3 varijable se često označavaju sa x, y, z.

Kvadratna forma

Zadatak.

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a)

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} =$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 4y^2$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 4y^2 + xy.$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 4y^2 + xy.$$

b)

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 4y^2 + xy.$$

b) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} \ =$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 4y^2 + xy.$$

b) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 4y^2 + xy.$$

b) Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\ &= x^2 + 3y^2 - 2z^2 \end{aligned}$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 4y^2 + xy.$$

b) Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\ &= x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 2xy \end{aligned}$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 4y^2 + xy.$$

b) Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\ &= x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 2xy + 4xz \end{aligned}$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice $\mathbf{A}$, ako je

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 4y^2 + xy.$$

b) Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\ &= x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 2xy + 4xz + 4yz. \end{aligned}$$

Kvadratna forma

Zadatak.

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi matricu za kvadratnu formu:

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi matricu za kvadratnu formu:

a) $x^2 - 5xy + 3y^2$,

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 5xy + 3y^2, \ \text{ b) } x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 3xz - 5yz.$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 5xy + 3y^2, \ \text{ b) } x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 3xz - 5yz.$$

Rješenje.

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 5xy + 3y^2, \ \text{ b) } x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 3xz - 5yz.$$

Rješenje. Uočimo da rješenje **nije jedinstveno**!

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 5xy + 3y^2, \ \text{ b) } x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 3xz - 5yz.$$

Rješenje. Uočimo da rješenje **nije jedinstveno**!
a)

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 5xy + 3y^2, \ \text{ b) } x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 3xz - 5yz.$$

Rješenje. Uočimo da rješenje **nije jedinstveno**!
a) Rješenja su

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 5xy + 3y^2, \ \text{ b) } x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 3xz - 5yz.$$

Rješenje. Uočimo da rješenje **nije jedinstveno**!
a) Rješenja su

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix},$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 5xy + 3y^2, \ \text{ b) } x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 3xz - 5yz.$$

Rješenje. Uočimo da rješenje **nije jedinstveno**!
a) Rješenja su

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix},$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 5xy + 3y^2, \ \text{ b) } x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 3xz - 5yz.$$

Rješenje. Uočimo da rješenje **nije jedinstveno**!
a) Rješenja su

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \ \ldots$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 5xy + 3y^2, \ \text{ b) } x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 3xz - 5yz.$$

Rješenje. Uočimo da rješenje **nije jedinstveno**!
a) Rješenja su

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \ \ldots$$

b)

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 5xy + 3y^2, \ \text{ b) } x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 3xz - 5yz.$$

Rješenje. Uočimo da rješenje **nije jedinstveno**!
a) Rješenja su

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \ \ldots$$

b) Rješenja su

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 5xy + 3y^2, \ \text{ b) } x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 3xz - 5yz.$$

Rješenje. Uočimo da rješenje **nije jedinstveno**!
a) Rješenja su

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \ \ldots$$

b) Rješenja su

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 7 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix},$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 5xy + 3y^2, \ \text{ b) } x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 3xz - 5yz.$$

Rješenje. Uočimo da rješenje **nije jedinstveno**!
a) Rješenja su

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \ \ldots$$

b) Rješenja su

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 7 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 10 \\ 6 & -5 & 7 \end{bmatrix},$$

Kvadratna forma

Zadatak. Odredi matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 5xy + 3y^2, \ \text{ b) } x^2 - 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 3xz - 5yz.$$

Rješenje. Uočimo da rješenje **nije jedinstveno**!
a) Rješenja su

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \ \ldots$$

b) Rješenja su

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 7 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 10 \\ 6 & -5 & 7 \end{bmatrix}, \ldots$$

Zaključak.

Kvadratna forma

Zaključak. Za zadanu kvadratnu formu postoji:

Kvadratna forma

Zaključak. Za zadanu kvadratnu formu postoji:

1. mnogo kvadratnih matrica čija je to forma,

Kvadratna forma

Zaključak. Za zadanu kvadratnu formu postoji:

1. mnogo kvadratnih matrica čija je to forma,
2. **samo jedna** simetrična matrica čija je to forma.

Kvadratna forma

Zaključak. Za zadanu kvadratnu formu postoji:

1. mnogo kvadratnih matrica čija je to forma,
2. **samo jedna** simetrična matrica čija je to forma.

Zadatak.

Kvadratna forma

Zaključak. Za zadanu kvadratnu formu postoji:

1. mnogo kvadratnih matrica čija je to forma,
2. **samo jedna** simetrična matrica čija je to forma.

Zadatak. Odredi simetričnu matricu za kvadratnu formu:

Kvadratna forma

Zaključak. Za zadanu kvadratnu formu postoji:

1. mnogo kvadratnih matrica čija je to forma,
2. **samo jedna** simetrična matrica čija je to forma.

Zadatak. Odredi simetričnu matricu za kvadratnu formu:

a) $x^2 - 2y^2 + 6xy$,

Kvadratna forma

Zaključak. Za zadanu kvadratnu formu postoji:

1. mnogo kvadratnih matrica čija je to forma,
2. **samo jedna** simetrična matrica čija je to forma.

Zadatak. Odredi simetričnu matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 2y^2 + 6xy, \ \text{ b) } x^2 + 3y^2 - z^2 + xy + 2xz - 4yz.$$

Kvadratna forma

Zaključak. Za zadanu kvadratnu formu postoji:

1. mnogo kvadratnih matrica čija je to forma,
2. **samo jedna** simetrična matrica čija je to forma.

Zadatak. Odredi simetričnu matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 2y^2 + 6xy, \ \text{ b) } x^2 + 3y^2 - z^2 + xy + 2xz - 4yz.$$

Rješenje.

Kvadratna forma

Zaključak. Za zadanu kvadratnu formu postoji:

1. mnogo kvadratnih matrica čija je to forma,
2. **samo jedna** simetrična matrica čija je to forma.

Zadatak. Odredi simetričnu matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 2y^2 + 6xy, \ \text{ b) } x^2 + 3y^2 - z^2 + xy + 2xz - 4yz.$$

Rješenje. Odgovarajuće simetrične matrice su:

a)

Kvadratna forma

Zaključak. Za zadanu kvadratnu formu postoji:

1. mnogo kvadratnih matrica čija je to forma,
2. **samo jedna** simetrična matrica čija je to forma.

Zadatak. Odredi simetričnu matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 2y^2 + 6xy, \ \text{ b) } x^2 + 3y^2 - z^2 + xy + 2xz - 4yz.$$

Rješenje. Odgovarajuće simetrične matrice su:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

Kvadratna forma

Zaključak. Za zadanu kvadratnu formu postoji:

1. mnogo kvadratnih matrica čija je to forma,
2. **samo jedna** simetrična matrica čija je to forma.

Zadatak. Odredi simetričnu matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 2y^2 + 6xy, \ \text{ b) } x^2 + 3y^2 - z^2 + xy + 2xz - 4yz.$$

Rješenje. Odgovarajuće simetrične matrice su:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ \text{ b)}$$

Kvadratna forma

Zaključak. Za zadanu kvadratnu formu postoji:

1. mnogo kvadratnih matrica čija je to forma,
2. **samo jedna** simetrična matrica čija je to forma.

Zadatak. Odredi simetričnu matricu za kvadratnu formu:

$$\text{a) } x^2 - 2y^2 + 6xy, \ \text{ b) } x^2 + 3y^2 - z^2 + xy + 2xz - 4yz.$$

Rješenje. Odgovarajuće simetrične matrice su:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ \text{ b) } \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kvadratna forma

Definicija.

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska,

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Zadatak.

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice A, ako je:

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice A, ako je:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice A, ako je:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice A, ako je:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice A, ako je:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a)

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice A, ako je:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} =$$

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice A, ako je:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice A, ako je:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 + 5y^2$$

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice A, ako je:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 + 5y^2$$

b)

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice A, ako je:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 + 5y^2$$

b) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} =$$

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice A, ako je:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 + 5y^2$$

b) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Zadatak. Odredi kvadratnu formu matrice A, ako je:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 + 5y^2$$

b) Vrijedi

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2x^2 - 4y^2 + 3z^2$$

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Zaključak.

Kvadratna forma

Definicija. Kažemo da je kvadratna forma $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kanonska, ako je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

Zaključak. Kanonska kvadratna forma ne sadrži **mješovite umnoške** varijabli.

Kvadratna forma

Pitanja:

Kvadratna forma

Pitanja:

1. može li se svaka kvadratna forma svesti na kanonski oblik?

Kvadratna forma

Pitanja:

1. može li se svaka kvadratna forma svesti na kanonski oblik?
2. ako se kvadratna forma može svesti na kanonski oblik:

Kvadratna forma

Pitanja:

1. može li se svaka kvadratna forma svesti na kanonski oblik?
2. ako se kvadratna forma može svesti na kanonski oblik:
    1. je li taj oblik jedinstven?

Kvadratna forma

Pitanja:

1. može li se svaka kvadratna forma svesti na kanonski oblik?
2. ako se kvadratna forma može svesti na kanonski oblik:
    1. je li taj oblik jedinstven?
    2. kako ga odrediti?

Kvadratna forma

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica,

Kvadratna forma

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, te $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ njena kvardatna forma.

Kvadratna forma

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, te $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ njena kvardatna forma. Sada imamo:

Kvadratna forma

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, te $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ njena kvardatna forma. Sada imamo:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} =$$

Kvadratna forma

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, te $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ njena kvardatna forma. Sada imamo:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} =$$

Kvadratna forma

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, te $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ njena kvardatna forma. Sada imamo:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{S}\mathbf{x}')^T\mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{x}') =$$

Kvadratna forma

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, te $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ njena kvardatna forma. Sada imamo:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{S}\mathbf{x}')^T\mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{x}') = (\mathbf{x}')^T(\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}'$$

Kvadratna forma

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, te $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ njena kvardatna forma. Sada imamo:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{S}\mathbf{x}')^T\mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{x}') = (\mathbf{x}')^T(\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}'$$

što će biti kanonska forma

Kvadratna forma

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, te $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ njena kvardatna forma. Sada imamo:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{S}\mathbf{x}')^T\mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{x}') = (\mathbf{x}')^T(\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}'$$

što će biti kanonska forma ako i samo ako je matrica $\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S}$ dijagonalna.

Kvadratna forma

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, te $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ njena kvardatna forma. Sada imamo:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{S}\mathbf{x}')^T\mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{x}') = (\mathbf{x}')^T(\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}'$$

što će biti kanonska forma ako i samo ako je matrica $\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S}$ dijagonalna.

Dakle, vrijedi:

Kvadratna forma

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, te $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ njena kvardatna forma. Sada imamo:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{S}\mathbf{x}')^T\mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{x}') = (\mathbf{x}')^T(\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}'$$

što će biti kanonska forma ako i samo ako je matrica $\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S}$ dijagonalna.

Dakle, vrijedi:

$$\begin{array}{l} \text{svaka kvadratna forma se može} \\ \text{svesti na kanonski oblik} \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

Kvadratna forma

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, te $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ njena kvardatna forma. Sada imamo:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{S}\mathbf{x}')^T\mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{x}') = (\mathbf{x}')^T(\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}'$$

što će biti kanonska forma ako i samo ako je matrica $\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S}$ dijagonalna.

Dakle, vrijedi:

svaka kvadratna forma se može svesti na kanonski oblik	$\Leftrightarrow$	svaka simetrična matrica se može dijagonalizirati

Kvadratna forma

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, te $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ njena kvardatna forma. Sada imamo:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{S}\mathbf{x}')^T\mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{x}') = (\mathbf{x}')^T(\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}'$$

što će biti kanonska forma ako i samo ako je matrica $\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S}$ dijagonalna.

Dakle, vrijedi:

svaka kvadratna forma se može svesti na kanonski oblik	$\Leftrightarrow$	svaka simetrična matrica se može dijagonalizirati

Zaključak:

Kvadratna forma

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, te $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ njena kvardatna forma. Sada imamo:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{S}\mathbf{x}')^T\mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{x}') = (\mathbf{x}')^T(\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}'$$

što će biti kanonska forma ako i samo ako je matrica $\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S}$ dijagonalna.

Dakle, vrijedi:

svaka kvadratna forma se može svesti na kanonski oblik	$\Leftrightarrow$	svaka simetrična matrica se može dijagonalizirati

Zaključak: za svaku kvadratnu formu postoji **<u>ortonormirana baza</u>**

Kvadratna forma

Neka je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, te $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ njena kvardatna forma. Sada imamo:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{S}\mathbf{x}')^T\mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{x}') = (\mathbf{x}')^T(\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}'$$

što će biti kanonska forma ako i samo ako je matrica $\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S}$ dijagonalna.

Dakle, vrijedi:

svaka kvadratna forma se može svesti na kanonski oblik	$\Leftrightarrow$	svaka simetrična matrica se može dijagonalizirati

Zaključak: za svaku kvadratnu formu postoji **<u>ortonormirana baza</u>** prelaskom u koju forma postaje kanonska.

Kvadratna forma

Pitanja:

1. može li se svaka kvadratna forma svesti na kanonski oblik?
2. ako se kvadratna forma može svesti na kanonski oblik:
    1. je li taj oblik jedinstven?
    2. kako ga odrediti?

Odgovori:

Kvadratna forma

Pitanja:

1. može li se svaka kvadratna forma svesti na kanonski oblik?
2. ako se kvadratna forma može svesti na kanonski oblik:
   1. je li taj oblik jedinstven?
   2. kako ga odrediti?

Odgovori:

1. svaka kvadratna forma se **<u>može</u>** svesti na kanonski oblik,

Kvadratna forma

Pitanja:

1. može li se svaka kvadratna forma svesti na kanonski oblik?
2. ako se kvadratna forma može svesti na kanonski oblik:
   1. je li taj oblik jedinstven?
   2. kako ga odrediti?

Odgovori:

1. svaka kvadratna forma se **<u>može</u>** svesti na kanonski oblik,
2. kanonski oblik kvadratne forme:

Kvadratna forma

Pitanja:

1. može li se svaka kvadratna forma svesti na kanonski oblik?
2. ako se kvadratna forma može svesti na kanonski oblik:
   1. je li taj oblik jedinstven?
   2. kako ga odrediti?

Odgovori:

1. svaka kvadratna forma se **<u>može</u>** svesti na kanonski oblik,
2. kanonski oblik kvadratne forme:
   1. **<u>nije jedinstven</u>**,

Kvadratna forma

Pitanja:

1. može li se svaka kvadratna forma svesti na kanonski oblik?
2. ako se kvadratna forma može svesti na kanonski oblik:
   1. je li taj oblik jedinstven?
   2. kako ga odrediti?

Odgovori:

1. svaka kvadratna forma se **<u>može</u>** svesti na kanonski oblik,
2. kanonski oblik kvadratne forme:
   1. **<u>nije jedinstven</u>**,
   2. određuje se **<u>dijagonalizacijom</u>** matrice **A** u **<u>ortonormiranoj</u>** bazi.

Kvadratna forma

Zadatak.

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy.$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy.$$

Rješenje.

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A} =$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Mogu se izračunati svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Mogu se izračunati svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Mogu se izračunati svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = 5 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Mogu se izračunati svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = 5 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pa dobivamo ortonormiranu bazu i matricu prijelaza

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Mogu se izračunati svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = 5 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pa dobivamo ortonormiranu bazu i matricu prijelaza

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Mogu se izračunati svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = 5 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pa dobivamo ortonormiranu bazu i matricu prijelaza

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Mogu se izračunati svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = 5 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pa dobivamo ortonormiranu bazu i matricu prijelaza

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S} =$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Mogu se izračunati svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \lambda_2 = 5 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pa dobivamo ortonormiranu bazu i matricu prijelaza

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy$$

Rješenje. Sada je

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy \quad =$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy$$

Rješenje. Sada je

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy \quad = \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} =$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy$$

Rješenje. Sada je

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy \quad = \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} =$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy$$

Rješenje. Sada je

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy \quad = \quad \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{x}')^T(\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}' =$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy$$

Rješenje. Sada je

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 + 4xy &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{x}')^T (\mathbf{S}^T \mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}' = \\ &= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy$$

Rješenje. Sada je

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 + 4xy &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{x}')^T (\mathbf{S}^T \mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}' = \\ &= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \\ &= (x')^2 + 5(y')^2 \end{aligned}$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy$$

Rješenje. Sada je

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 + 4xy &= \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{x}')^T(\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}' = \\ &= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \\ &= (x')^2 + 5(y')^2 \text{ - kanonska forma} \end{aligned}$$

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy$$

Rješenje. Sada je

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 + 4xy &= \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{x}')^T(\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}' = \\ &= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \\ &= (x')^2 + 5(y')^2 \text{ - kanonska forma} \end{aligned}$$

Napomena.

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy$$

Rješenje. Sada je

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 + 4xy &= \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{x}')^T(\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}' = \\ &= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \\ &= (x')^2 + 5(y')^2 \text{ - kanonska forma} \end{aligned}$$

Napomena. Uočimo da su koeficijenti u kanonskom obliku forme

Kvadratna forma

Zadatak. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$3x^2 + 3y^2 + 4xy$$

Rješenje. Sada je

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 + 4xy &= \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{supstitucija:} \\ \mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}' \end{array} \right\} = (\mathbf{x}')^T(\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{x}' = \\ &= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \\ &= (x')^2 + 5(y')^2 \text{ - kanonska forma} \end{aligned}$$

Napomena. Uočimo da su koeficijenti u kanonskom obliku forme <u>**svojstvene vrijednosti**</u> matrice **A**.

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija.

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Krivulja drugog reda* je skup točaka ravnine

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Krivulja drugog reda* je skup točaka ravnine definiran sa $\{(x, y) : \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0\}$

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Krivulja drugog reda* je skup točaka ravnine definiran sa $\{(x, y) : \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y),

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Krivulja drugog reda* je skup točaka ravnine definiran sa $\{(x, y) : \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 2,

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Krivulja drugog reda* je skup točaka ravnine definiran sa $\{(x, y) : \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 2, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 2×1,

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Krivulja drugog reda* je skup točaka ravnine definiran sa $\{(x, y) : \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 2, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 2×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Krivulja drugog reda* je skup točaka ravnine definiran sa $\{(x, y) : \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 2, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 2×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Krivulja drugog reda* je skup točaka ravnine definiran sa $\{(x, y) : \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 2, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 2×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

onda jednadžbu krivulje drugog reda možemo raspisati kao

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Krivulja drugog reda* je skup točaka ravnine definiran sa $\{(x, y) : \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 2, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 2×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

onda jednadžbu krivulje drugog reda možemo raspisati kao

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0$$

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Krivulja drugog reda* je skup točaka ravnine definiran sa $\{(x, y) : \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 2, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 2×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

onda jednadžbu krivulje drugog reda možemo raspisati kao

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c &= 0 \\ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c &= 0 \end{aligned}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Krivulja drugog reda* je skup točaka ravnine definiran sa $\{(x, y) : \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 2, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 2×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

onda jednadžbu krivulje drugog reda možemo raspisati kao

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c &= 0 \\ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c &= 0 \\ a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 & \end{aligned}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Krivulja drugog reda* je skup točaka ravnine definiran sa $\{(x, y) : \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 2, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 2×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

onda jednadžbu krivulje drugog reda možemo raspisati kao

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c &= 0 \\ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c &= 0 \\ a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y & \end{aligned}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Krivulja drugog reda* je skup točaka ravnine definiran sa $\{(x, y) : \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 2, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 2×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

onda jednadžbu krivulje drugog reda možemo raspisati kao

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c &= 0 \\ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c &= 0 \\ a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c &= 0 \end{aligned}$$

Zadatak.

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu krivulje drugog reda zadane sa

Zadatak. Odredi jednadžbu krivulje drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = 11.$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu krivulje drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = 11.$$

Rješenje.

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu krivulje drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = 11.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \quad = \quad 0,$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu krivulje drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = 11.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c &= 0, \\ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + & \end{aligned}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu krivulje drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = 11.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c &= 0, \\ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu krivulje drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = 11.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c &= 0, \\ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 11 &= 0, \end{aligned}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu krivulje drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = 11.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c &= 0, \\ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 11 &= 0, \\ x^2 - 2y^2 + 6xy + & \end{aligned}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu krivulje drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = 11.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c &= 0, \\ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 11 &= 0, \\ x^2 - 2y^2 + 6xy + 4x + 6y + & \end{aligned}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu krivulje drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = 11.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c &= 0, \\ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 11 &= 0, \\ x^2 - 2y^2 + 6xy + 4x + 6y + 11 &= 0. \end{aligned}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu krivulje drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = 11.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c &= 0, \\ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 11 &= 0, \\ x^2 - 2y^2 + 6xy + 4x + 6y + 11 &= 0. \end{aligned}$$

Uočimo da iz općenite jednadžbe <u>**ne možemo lako prepoznati**</u> o kojoj krivulji drugog reda je riječ.

Zadatak.

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 + 4y^2 - 2xy + 3x - 5y - 6 = 0.$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 + 4y^2 - 2xy + 3x - 5y - 6 = 0.$$

Rješenje.

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 + 4y^2 - 2xy + 3x - 5y - 6 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 + 4y^2 - 2xy + 3x - 5y - 6 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} =$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 + 4y^2 - 2xy + 3x - 5y - 6 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 + 4y^2 - 2xy + 3x - 5y - 6 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} =$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 + 4y^2 - 2xy + 3x - 5y - 6 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 + 4y^2 - 2xy + 3x - 5y - 6 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ i } c =$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 + 4y^2 - 2xy + 3x - 5y - 6 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ i } c = -6.$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 + 4y^2 - 2xy + 3x - 5y - 6 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ i } c = -6.$$

Matrična jednadžba je

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 + 4y^2 - 2xy + 3x - 5y - 6 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ i } c = -6.$$

Matrična jednadžba je

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c &= 0 \\ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + & \end{aligned}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 + 4y^2 - 2xy + 3x - 5y - 6 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ i } c = -6.$$

Matrična jednadžba je

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c &= 0 \\ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 + 4y^2 - 2xy + 3x - 5y - 6 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ i } c = -6.$$

Matrična jednadžba je

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c &= 0 \\ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Definicija.

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Ploha drugog reda* je skup točaka prostora

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Ploha drugog reda* je skup točaka prostora definiran sa $\{(x, y, z) : \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0\}$

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Ploha drugog reda* je skup točaka prostora definiran sa $\{(x, y, z) : \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y, z),

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Ploha drugog reda* je skup točaka prostora definiran sa $\{(x, y, z) : \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y, z), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 3,

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Ploha drugog reda* je skup točaka prostora definiran sa $\{(x, y, z) : \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y, z), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 3, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 3×1,

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Ploha drugog reda* je skup točaka prostora definiran sa $\{(x, y, z) : \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y, z), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 3, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 3×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Ploha drugog reda* je skup točaka prostora definiran sa $\{(x, y, z) : \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y, z), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 3, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 3×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Ploha drugog reda* je skup točaka prostora definiran sa $\{(x, y, z) : \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y, z), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 3, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 3×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

onda jednadžbu plohe drugog reda možemo raspisati kao

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} +$$

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Ploha drugog reda* je skup točaka prostora definiran sa $\{(x, y, z) : \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y, z), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 3, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 3×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

onda jednadžbu plohe drugog reda možemo raspisati kao

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} +$$

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Ploha drugog reda* je skup točaka prostora definiran sa $\{(x, y, z) : \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y, z), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 3, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 3×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

onda jednadžbu plohe drugog reda možemo raspisati kao

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + c = 0$$

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Ploha drugog reda* je skup točaka prostora definiran sa $\{(x, y, z) : \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y, z), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 3, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 3×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

onda jednadžbu plohe drugog reda možemo raspisati kao

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + c = 0$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz +$$

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Ploha drugog reda* je skup točaka prostora definiran sa $\{(x, y, z) : \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y, z), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 3, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 3×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

onda jednadžbu plohe drugog reda možemo raspisati kao

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + c = 0$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz + \\ + b_1x + b_2y + b_3z$$

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. *Ploha drugog reda* je skup točaka prostora definiran sa $\{(x, y, z) : \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0\}$ gdje je $\mathbf{x}$ matrični prikaz vektora (x, y, z), $\mathbf{A}$ kvardatna matrica reda 3, $\mathbf{b}$ stupčani vektor tipa 3×1, te $c \in \mathbb{R}$.

Ako je

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

onda jednadžbu plohe drugog reda možemo raspisati kao

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + c = 0$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz + \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

Zadatak.

Zadatak. Odredi jednadžbu plohe drugog reda zadane sa

Zadatak. Odredi jednadžbu plohe drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = -9.$$

Zadatak. Odredi jednadžbu plohe drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = -9.$$

Rješenje.

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu plohe drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = -9.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \quad = \quad 0,$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu plohe drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = -9.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0,$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} +$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu plohe drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = -9.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0,$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu plohe drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = -9.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c &= 0, \\ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 9 &= 0, \end{aligned}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu plohe drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = -9.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c &= 0, \\ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 9 &= 0, \end{aligned}$$

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 +$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu plohe drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = -9.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c &= 0, \\ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 9 &= 0, \end{aligned}$$

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4xy + 6xz - 2yz +$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu plohe drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = -9.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c &= 0, \\ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 9 &= 0, \end{aligned}$$

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4xy + 6xz - 2yz + 4x + 6y + 7z$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Odredi jednadžbu plohe drugog reda zadane sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = -9.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c &= 0, \\ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 9 &= 0, \\ x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4xy + 6xz - 2yz + 4x + 6y + 7z - 9 &= 0. \end{aligned}$$

Zadatak.

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 8xz + 6yz + 2x + 4y - z + 4 = 0.$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 8xz + 6yz + 2x + 4y - z + 4 = 0.$$

Rješenje.

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 8xz + 6yz + 2x + 4y - z + 4 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} =$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 8xz + 6yz + 2x + 4y - z + 4 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 8xz + 6yz + 2x + 4y - z + 4 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} =$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 8xz + 6yz + 2x + 4y - z + 4 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 8xz + 6yz + 2x + 4y - z + 4 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \ \text{i} \ c = 4.$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 8xz + 6yz + 2x + 4y - z + 4 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ i } c = 4.$$

Matrična jednadžba je

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 8xz + 6yz + 2x + 4y - z + 4 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ i } c = 4.$$

Matrična jednadžba je

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} +$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 8xz + 6yz + 2x + 4y - z + 4 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ i } c = 4.$$

Matrična jednadžba je

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c &= 0 \\ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

Krivulje i plohe drugog reda

Zadatak. Zapiši matrično jednadžbu krivulje drugog reda

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 8xz + 6yz + 2x + 4y - z + 4 = 0.$$

Rješenje. Jednadžba je zadana sa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ i } c = 4.$$

Matrična jednadžba je

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c &= 0 \\ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Definicija.

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. Kažemo da je jednadžba $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0$ krivulje (ili plohe) drugog reda u kanonskom obliku

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. Kažemo da je jednadžba $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0$ krivulje (ili plohe) drugog reda u kanonskom obliku ako je $\mathbf{A}$ dijagonalna matrica,

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. Kažemo da je jednadžba $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0$ krivulje (ili plohe) drugog reda u kanonskom obliku ako je $\mathbf{A}$ dijagonalna matrica, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$,

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. Kažemo da je jednadžba $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0$ krivulje (ili plohe) drugog reda u kanonskom obliku ako je $\mathbf{A}$ dijagonalna matrica, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$, te $c = \pm 1$ ili $c = 0$.

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. Kažemo da je jednadžba $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0$ krivulje (ili plohe) drugog reda u kanonskom obliku ako je $\mathbf{A}$ dijagonalna matrica, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$, te $c = \pm 1$ ili $c = 0$.

Napomena.

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. Kažemo da je jednadžba $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0$ krivulje (ili plohe) drugog reda u kanonskom obliku ako je $\mathbf{A}$ dijagonalna matrica, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$, te $c = \pm 1$ ili $c = 0$.

Napomena. Jednadžba <u>**svake**</u> krivulje (odnosno plohe) se može svesti na kanonski oblik

Krivulje i plohe drugog reda

Definicija. Kažemo da je jednadžba $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0$ krivulje (ili plohe) drugog reda u kanonskom obliku ako je $\mathbf{A}$ dijagonalna matrica, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$, te $c = \pm 1$ ili $c = 0$.

Napomena. Jednadžba **svake** krivulje (odnosno plohe) se može svesti na kanonski oblik **promjenom baze** prostora.

Klasifikacija krivulja drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe krivulje

$$a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

Klasifikacija krivulja drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe krivulje

$$a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

Klasifikacija krivulja drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe krivulje

$$a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

1. (rotacija)

Klasifikacija krivulja drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe krivulje

$$a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

1. (rotacija) promjenom baze prostora (supstitucija $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}'$)

Klasifikacija krivulja drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe krivulje

$$a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

1. (rotacija) promjenom baze prostora (supstitucija $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}'$) dijagonaliziramo kvadratnu formu

Klasifikacija krivulja drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe krivulje

$$a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

1. (rotacija) promjenom baze prostora (supstitucija $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}'$) dijagonaliziramo kvadratnu formu i jednadžba postaje

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \mu_1x' + \mu_2y' + \gamma = 0;$$

Klasifikacija krivulja drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe krivulje

$$a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

1. (rotacija) promjenom baze prostora (supstitucija $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}'$) dijagonaliziramo kvadratnu formu i jednadžba postaje

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \mu_1x' + \mu_2y' + \gamma = 0;$$

2. (translacija)

Klasifikacija krivulja drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe krivulje

$$a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

1. (rotacija) promjenom baze prostora (supstitucija $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}'$) dijagonaliziramo kvadratnu formu i jednadžba postaje

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \mu_1x' + \mu_2y' + \gamma = 0;$$

2. (translacija) odgovarajućim supstitucijama eliminiramo linearne članove.

Klasifikacija krivulja drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe krivulje

$$a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

1. (rotacija) promjenom baze prostora (supstitucija $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}'$) dijagonaliziramo kvadratnu formu i jednadžba postaje

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \mu_1x' + \mu_2y' + \gamma = 0;$$

2. (translacija) odgovarajućim supstitucijama eliminiramo linearne članove.

Napomena.

Klasifikacija krivulja drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe krivulje

$$a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

1. (rotacija) promjenom baze prostora (supstitucija $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}'$) dijagonaliziramo kvadratnu formu i jednadžba postaje

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \mu_1x' + \mu_2y' + \gamma = 0;$$

2. (translacija) odgovarajućim supstitucijama eliminiramo linearne članove.

Napomena. Uočimo da su koeficijenti uz kvadrate u "sređenoj" jednadžbi

Klasifikacija krivulja drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe krivulje

$$a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

1. (rotacija) promjenom baze prostora (supstitucija $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}'$) dijagonaliziramo kvadratnu formu i jednadžba postaje

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \mu_1x' + \mu_2y' + \gamma = 0;$$

2. (translacija) odgovarajućim supstitucijama eliminiramo linearne članove.

Napomena. Uočimo da su koeficijenti uz kvadrate u "sređenoj" jednadžbi zapravo svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 matrice $\mathbf{A}$.

Klasifikacija krivulja drugog reda

Podsjetimo se:

Klasifikacija krivulja drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi

Klasifikacija krivulja drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ kvadratne forme.

Klasifikacija krivulja drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ kvadratne forme.

Klasifikacija krivulja drugog reda prema svojstvenim vrijednostima:

Klasifikacija krivulja drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi su svojstvene vrijednosti matrice **A** kvadratne forme.

Klasifikacija krivulja drugog reda prema svojstvenim vrijednostima:

A) obje svojstvene vrijednosti su različite od nula,

Klasifikacija krivulja drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi su svojstvene vrijednosti matrice **A** kvadratne forme.

Klasifikacija krivulja drugog reda prema svojstvenim vrijednostima:

A) obje svojstvene vrijednosti su različite od nula,

1. svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 su istog predznaka,

Klasifikacija krivulja drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi su svojstvene vrijednosti matrice **A** kvadratne forme.

Klasifikacija krivulja drugog reda prema svojstvenim vrijednostima:

A) obje svojstvene vrijednosti su različite od nula,

1. svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 su istog predznaka,
2. svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 su suprotnog predznaka,

Klasifikacija krivulja drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi su svojstvene vrijednosti matrice **A** kvadratne forme.

Klasifikacija krivulja drugog reda prema svojstvenim vrijednostima:

A) obje svojstvene vrijednosti su različite od nula,

   1. svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 su istog predznaka,
   2. svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 su suprotnog predznaka,

B) jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

Klasifikacija krivulja drugog reda

A) Obje svojstvene vrijednosti su različite od nula.

Klasifikacija krivulja drugog reda

A) Obje svojstvene vrijednosti su različite od nula.

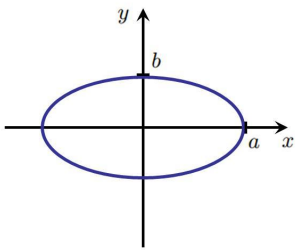
1. ako su λ_1 i λ_2 istog predznaka onda imamo

Klasifikacija krivulja drugog reda

A) Obje svojstvene vrijednosti su različite od nula.

1. ako su λ_1 i λ_2 istog predznaka onda imamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{- elipsa}$$

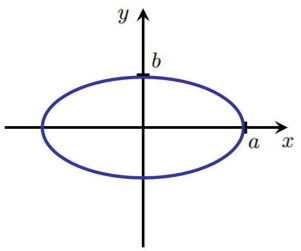


Klasifikacija krivulja drugog reda

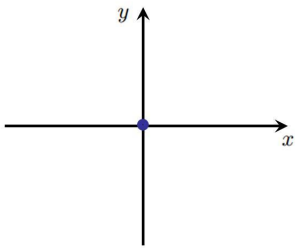
A) Obje svojstvene vrijednosti su različite od nula.

1. ako su λ_1 i λ_2 istog predznaka onda imamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{- elipsa}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \text{- jedna točka}$$

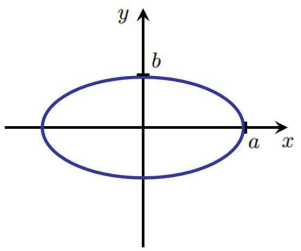


Klasifikacija krivulja drugog reda

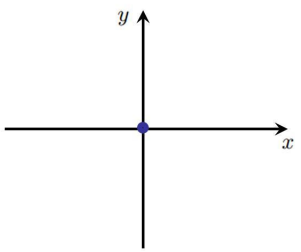
A) Obje svojstvene vrijednosti su različite od nula.

1. ako su λ_1 i λ_2 istog predznaka onda imamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{- elipsa}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \text{- jedna točka}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \text{- prazan skup}$$

Klasifikacija krivulja drugog reda

A) Obje svojstvene vrijednosti su različite od nula.

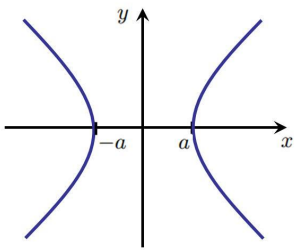
2. ako su λ_1 i λ_2 suprotnog predznaka onda imamo

Klasifikacija krivulja drugog reda

A) Obje svojstvene vrijednosti su različite od nula.

2. ako su λ_1 i λ_2 suprotnog predznaka onda imamo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{- hiperbola}$$

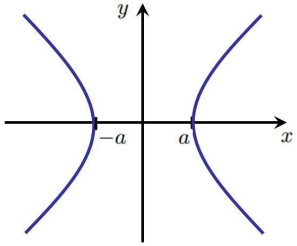


Klasifikacija krivulja drugog reda

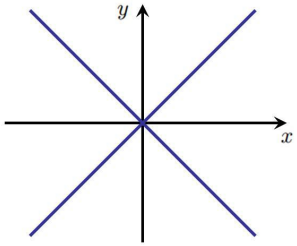
A) Obje svojstvene vrijednosti su različite od nula.

2. ako su λ_1 i λ_2 suprotnog predznaka onda imamo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{- hiperbola}$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \text{- ukršteni pravci}$$

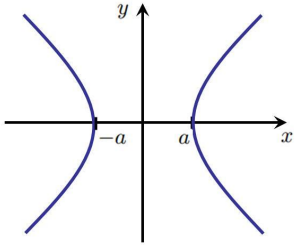


Klasifikacija krivulja drugog reda

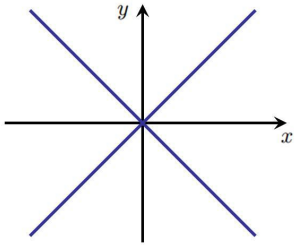
A) Obje svojstvene vrijednosti su različite od nula.

2. ako su λ_1 i λ_2 suprotnog predznaka onda imamo

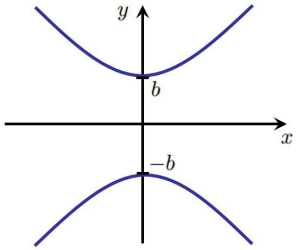
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{- hiperbola}$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \text{- ukršteni pravci}$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \text{- hiperbola}$$



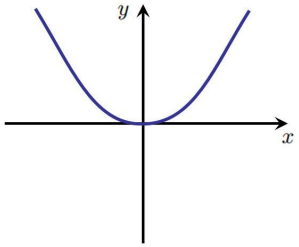
Klasifikacija krivulja drugog reda

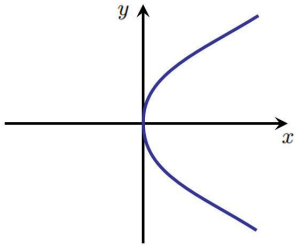
B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

Klasifikacija krivulja drugog reda

B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

$x^2 = 2py \quad (y^2 = 2px)$ - parabola

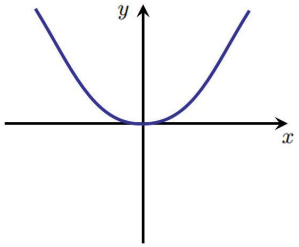


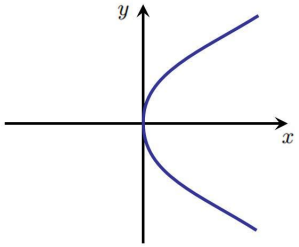


Klasifikacija krivulja drugog reda

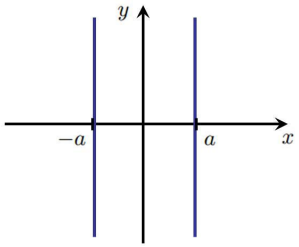
B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

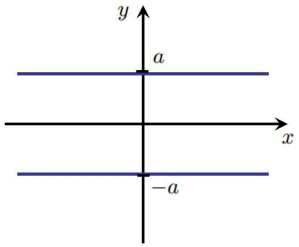
$x^2 = 2py \quad (y^2 = 2px)$ - parabola





$x^2 = a^2 \quad (y^2 = a^2)$ - paralelni pravci

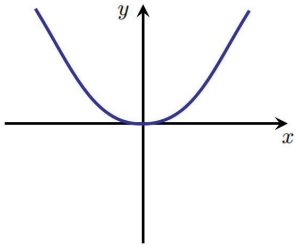


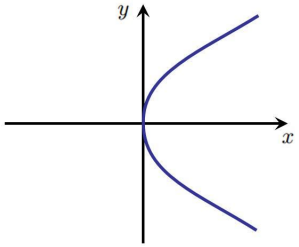


Klasifikacija krivulja drugog reda

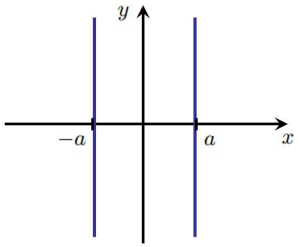
B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

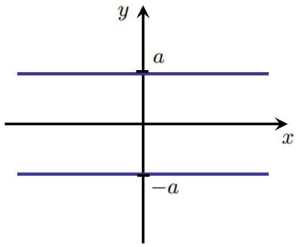
$x^2 = 2py \quad (y^2 = 2px)$ - parabola



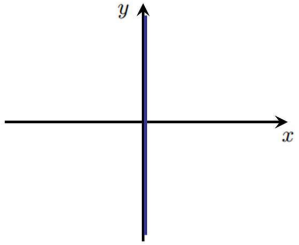


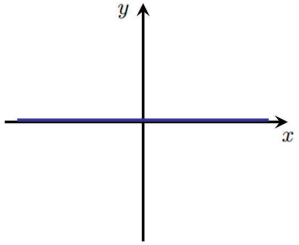
$x^2 = a^2 \quad (y^2 = a^2)$ - paralelni pravci





$x^2 = 0 \quad (y^2 = 0)$ - jedan pravac

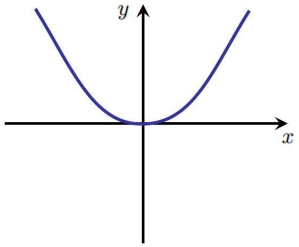


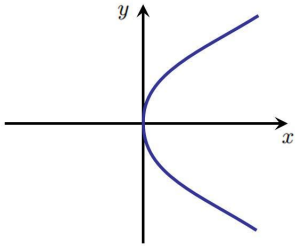


Klasifikacija krivulja drugog reda

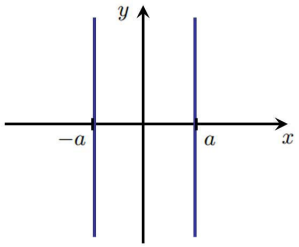
B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

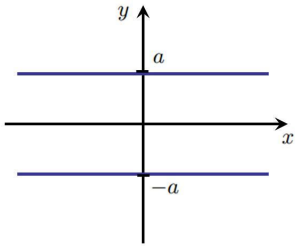
$x^2 = 2py \quad (y^2 = 2px)$ - parabola



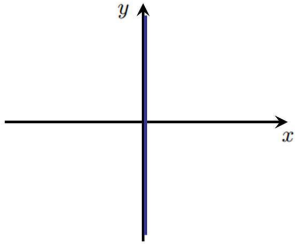


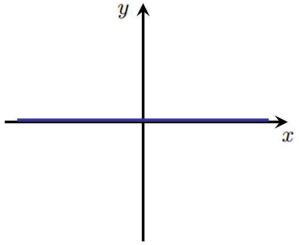
$x^2 = a^2 \quad (y^2 = a^2)$ - paralelni pravci





$x^2 = 0 \quad (y^2 = 0)$ - jedan pravac





$x^2 = -a^2 \quad (y^2 = -a^2)$ - prazan skup

Klasifikacija ploha drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe plohe

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz + \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

Klasifikacija ploha drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe plohe

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz + \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

Klasifikacija ploha drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe plohe

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz + \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

1. (rotacija)

Klasifikacija ploha drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe plohe

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz + \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

1. (rotacija) promjenom baze prostora (supstitucija $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}'$)

Klasifikacija ploha drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe plohe

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz + \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

1. (rotacija) promjenom baze prostora (supstitucija $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}'$) dijagonaliziramo kvadratnu formu

Klasifikacija ploha drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe plohe

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz + \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

1. (rotacija) promjenom baze prostora (supstitucija $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}'$) dijagonaliziramo kvadratnu formu i jednadžba postaje

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + \mu_1x' + \mu_2y' + \mu_3z' + \gamma = 0.$$

Klasifikacija ploha drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe plohe

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz + \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

1. (rotacija) promjenom baze prostora (supstitucija $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}'$) dijagonaliziramo kvadratnu formu i jednadžba postaje

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + \mu_1x' + \mu_2y' + \mu_3z' + \gamma = 0.$$

2. (translacija)

Klasifikacija ploha drugog reda

Postupak svođenja jednadžbe plohe

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz + \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

na kanonski oblik **ortonormiranom transformacijom** je sljedeći:

1. (rotacija) promjenom baze prostora (supstitucija $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}'$) dijagonaliziramo kvadratnu formu i jednadžba postaje

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + \mu_1x' + \mu_2y' + \mu_3z' + \gamma = 0.$$

2. (translacija) odgovarajućim supstitucijama eliminiramo linearne članove.

Klasifikacija ploha drugog reda

Podsjetimo se:

Klasifikacija ploha drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi

Klasifikacija ploha drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ kvadratne forme.

Klasifikacija ploha drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ kvadratne forme.

Klasifikacija ploha drugog reda prema svojstvenim vrijednostima:

Klasifikacija ploha drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ kvadratne forme.

Klasifikacija ploha drugog reda prema svojstvenim vrijednostima:

A) obje svojstvene vrijednosti su različite od nula:

Klasifikacija ploha drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi su svojstvene vrijednosti matrice **A** kvadratne forme.

Klasifikacija ploha drugog reda prema svojstvenim vrijednostima:

A) obje svojstvene vrijednosti su različite od nula:

1. sve tri svojstvene vrijednosti su istog predznaka,

Klasifikacija ploha drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ kvadratne forme.

Klasifikacija ploha drugog reda prema svojstvenim vrijednostima:

A) obje svojstvene vrijednosti su različite od nula:

1. sve tri svojstvene vrijednosti su istog predznaka,
2. jedna svojstvena vrijednost je različitog predznaka od ostalih,

Klasifikacija ploha drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi su svojstvene vrijednosti matrice **A** kvadratne forme.

Klasifikacija ploha drugog reda prema svojstvenim vrijednostima:

A) obje svojstvene vrijednosti su različite od nula:

   1. sve tri svojstvene vrijednosti su istog predznaka,
   2. jedna svojstvena vrijednost je različitog predznaka od ostalih,

B) jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula:

Klasifikacija ploha drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi su svojstvene vrijednosti matrice **A** kvadratne forme.

Klasifikacija ploha drugog reda prema svojstvenim vrijednostima:

A) obje svojstvene vrijednosti su različite od nula:

   1. sve tri svojstvene vrijednosti su istog predznaka,
   2. jedna svojstvena vrijednost je različitog predznaka od ostalih,

B) jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula:

   1. dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su istog predznaka.

Klasifikacija ploha drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi su svojstvene vrijednosti matrice **A** kvadratne forme.

Klasifikacija ploha drugog reda prema svojstvenim vrijednostima:

A) obje svojstvene vrijednosti su različite od nula:

1. sve tri svojstvene vrijednosti su istog predznaka,
2. jedna svojstvena vrijednost je različitog predznaka od ostalih,

B) jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula:

1. dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su istog predznaka.
2. dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su suprotnog predznaka.

Klasifikacija ploha drugog reda

Podsjetimo se: koeficijenti u kanonskoj formi su svojstvene vrijednosti matrice **A** kvadratne forme.

Klasifikacija ploha drugog reda prema svojstvenim vrijednostima:

A) obje svojstvene vrijednosti su različite od nula:

   1. sve tri svojstvene vrijednosti su istog predznaka,
   2. jedna svojstvena vrijednost je različitog predznaka od ostalih,

B) jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula:

   1. dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su istog predznaka.
   2. dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su suprotnog predznaka.

C) dvije svojestvene vrijednosti su jednake nula.

Klasifikacija ploha drugog reda

A) Sve tri svojstvene vrijednosti su različite od nula.

Klasifikacija ploha drugog reda

A) Sve tri svojstvene vrijednosti su različite od nula.

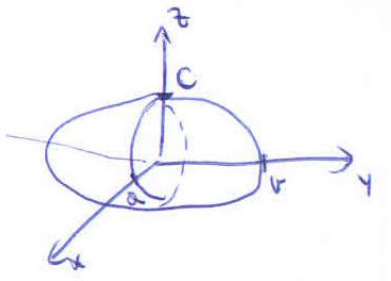
1. Sve tri svojstvene vrijednosti su istog predznaka.

Klasifikacija ploha drugog reda

A) Sve tri svojstvene vrijednosti su različite od nula.

1. Sve tri svojstvene vrijednosti su istog predznaka.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{- elipsoid}$$

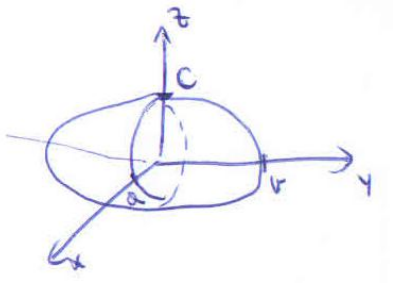


Klasifikacija ploha drugog reda

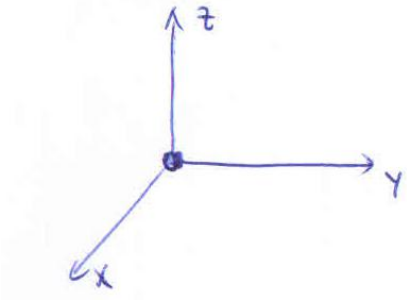
A) Sve tri svojstvene vrijednosti su različite od nula.

1. Sve tri svojstvene vrijednosti su istog predznaka.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{- elipsoid}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad \text{- jedna točka}$$

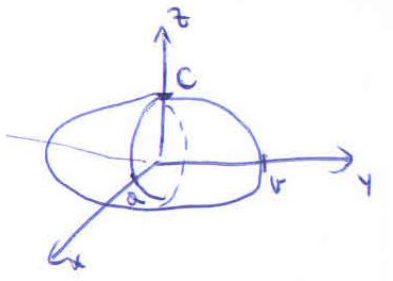


Klasifikacija ploha drugog reda

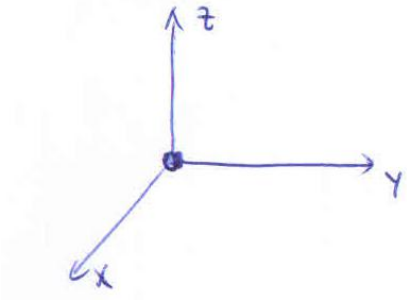
A) Sve tri svojstvene vrijednosti su različite od nula.

1. Sve tri svojstvene vrijednosti su istog predznaka.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{- elipsoid}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad \text{- jedna točka}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad \text{- prazan skup}$$

Klasifikacija ploha drugog reda

A) Sve tri svojstvene vrijednosti su različite od nula.

2. Jedna svojstvena vrijednost je različitog predznaka od ostalih.

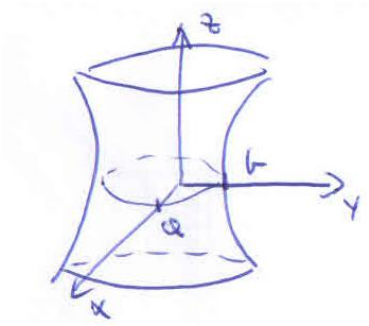
Klasifikacija ploha drugog reda

A) Sve tri svojstvene vrijednosti su različite od nula.

2. Jedna svojstvena vrijednost je različitog predznaka od ostalih.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- jednoplošni eliptički hiperboloid



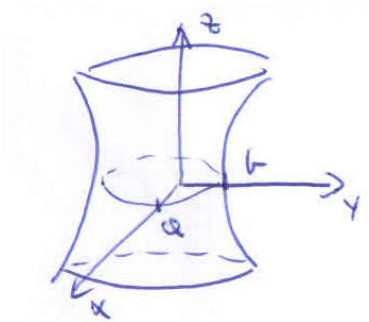
Klasifikacija ploha drugog reda

A) Sve tri svojstvene vrijednosti su različite od nula.

2. Jedna svojstvena vrijednost je različitog predznaka od ostalih.

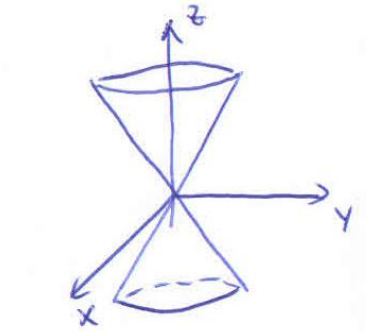
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- jednoplošni eliptički hiperboloid



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

- konus



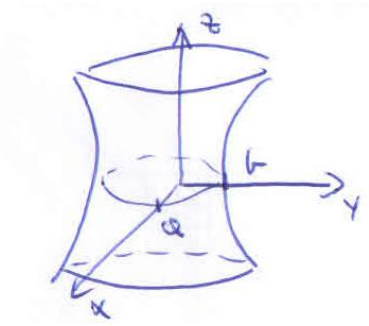
Klasifikacija ploha drugog reda

A) Sve tri svojstvene vrijednosti su različite od nula.

2. Jedna svojstvena vrijednost je različitog predznaka od ostalih.

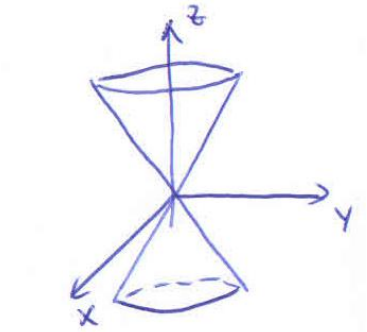
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- jednoplošni eliptički hiperboloid



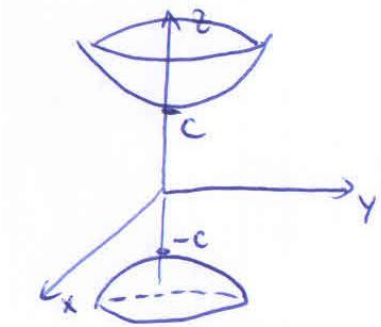
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

- konus



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

- dvoplošni eliptički hiperboloid



Klasifikacija ploha drugog reda

B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

Klasifikacija ploha drugog reda

B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

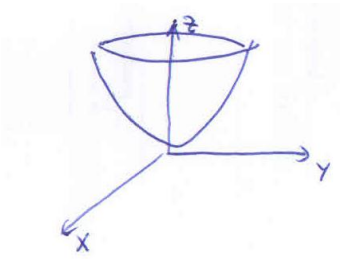
1. Dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su istog predznaka.

Klasifikacija ploha drugog reda

B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

1. Dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su istog predznaka.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad \text{- eliptički paraboloid}$$

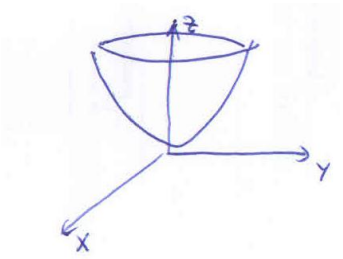


Klasifikacija ploha drugog reda

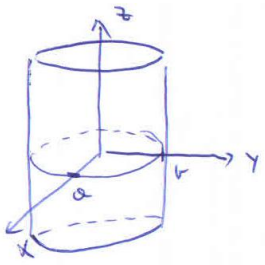
B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

1. Dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su istog predznaka.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad \text{- eliptički paraboloid}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{- eliptički cilindar}$$

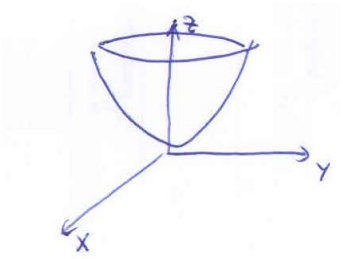


Klasifikacija ploha drugog reda

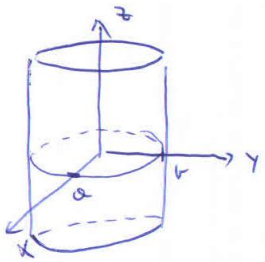
B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

1. Dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su istog predznaka.

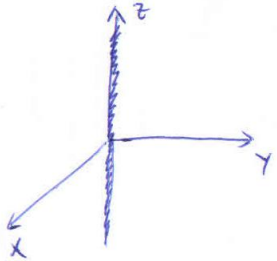
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$ - eliptički paraboloid



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ - eliptički cilindar



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$ - jedan pravac

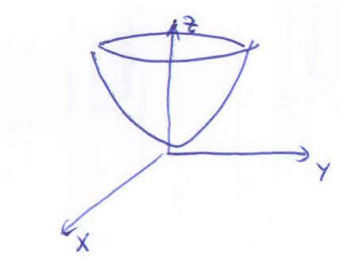


Klasifikacija ploha drugog reda

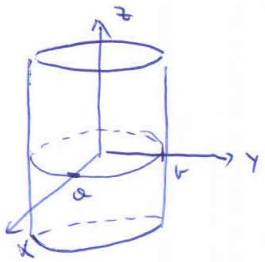
B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

1. Dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su istog predznaka.

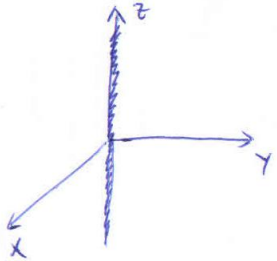
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad \text{- eliptički paraboloid}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{- eliptički cilindar}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{- jedan pravac}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{- prazan skup}$$

Klasifikacija ploha drugog reda

B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

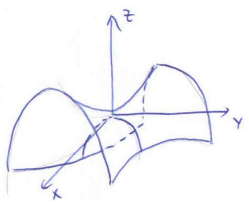
2. Dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su suprotnog predznaka.

Klasifikacija ploha drugog reda

B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

2. Dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su suprotnog predznaka.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$ - hiperbolički paraboloid (sedlo)

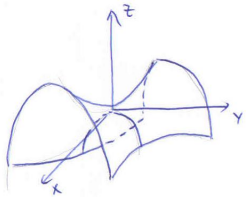


Klasifikacija ploha drugog reda

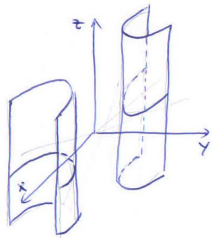
B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

2. Dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su suprotnog predznaka.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$ - hiperbolički paraboloid (sedlo)



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ - hiperbolički cilindar

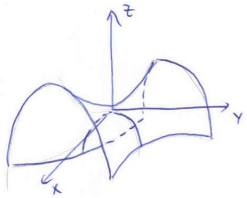


Klasifikacija ploha drugog reda

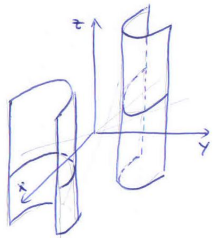
B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

2. Dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su suprotnog predznaka.

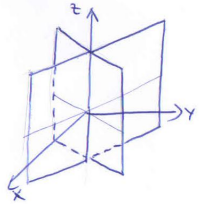
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$ - hiperbolički paraboloid (sedlo)



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ - hiperbolički cilindar



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$ - par ukrštenih ravnina

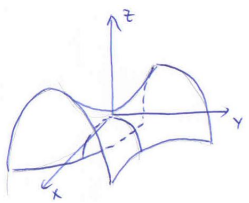


Klasifikacija ploha drugog reda

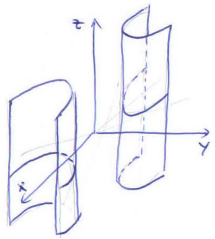
B) Jedna svojstvena vrijednost je jednaka nula.

2. Dvije ne-nul svojstvene vrijednosti su suprotnog predznaka.

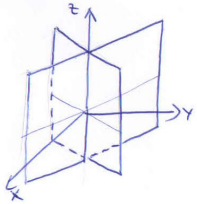
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$ - hiperbolički paraboloid (sedlo)



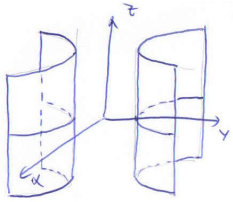
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ - hiperbolički cilindar



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$ - par ukrštenih ravnina



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$ - hiperbolički cilindar



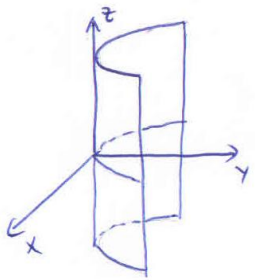
Klasifikacija ploha drugog reda

C) Dvije svojestvene vrijednosti su jednake nula.

Klasifikacija ploha drugog reda

C) Dvije svojestvene vrijednosti su jednake nula.

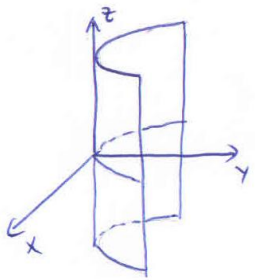
$x^2 = 2py$ - parabolički cilindar



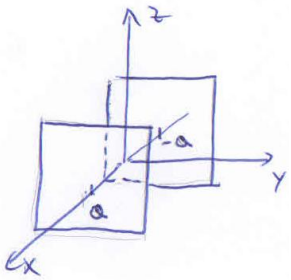
Klasifikacija ploha drugog reda

C) Dvije svojestvene vrijednosti su jednake nula.

$x^2 = 2py$ - parabolički cilindar



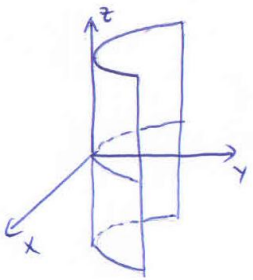
$x^2 = a^2$ - par paralelnih ravnina



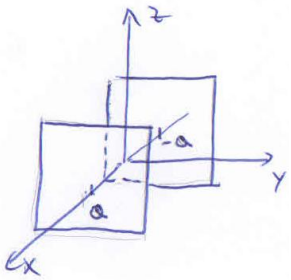
Klasifikacija ploha drugog reda

C) Dvije svojestvene vrijednosti su jednake nula.

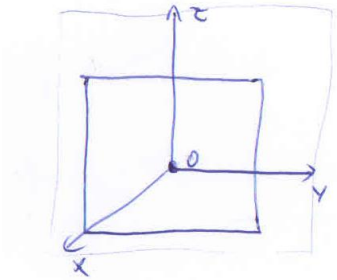
$x^2 = 2py$ - parabolički cilindar



$x^2 = a^2$ - par paralelnih ravnina



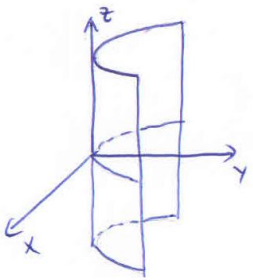
$x^2 = 0$ - jedna ravnina



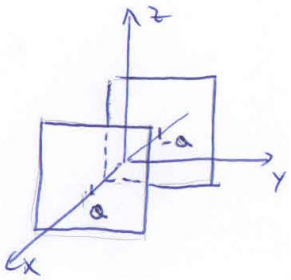
Klasifikacija ploha drugog reda

C) Dvije svojestvene vrijednosti su jednake nula.

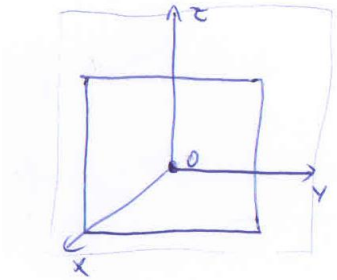
$x^2 = 2py$ - parabolički cilindar



$x^2 = a^2$ - par paralelnih ravnina



$x^2 = 0$ - jedna ravnina



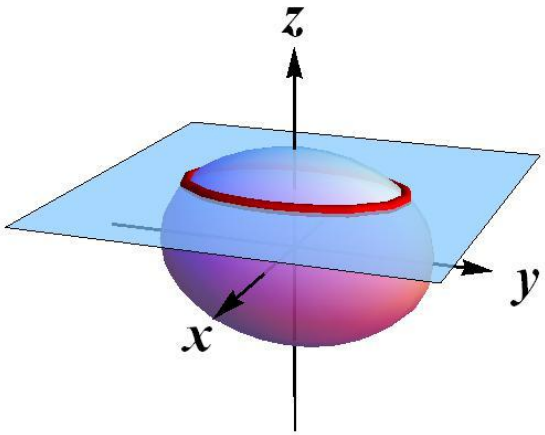
$x^2 = -a^2$ - prazan skup

Klasifikacija ploha drugog reda

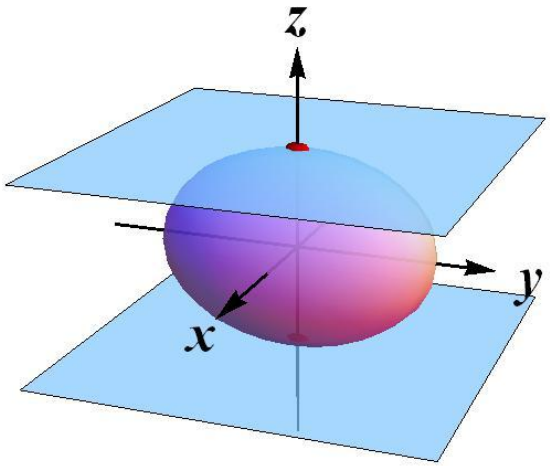
Presjeci **elipsoida** sa ravninama $z = h$.

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = h \\ \hline \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \end{array}$$

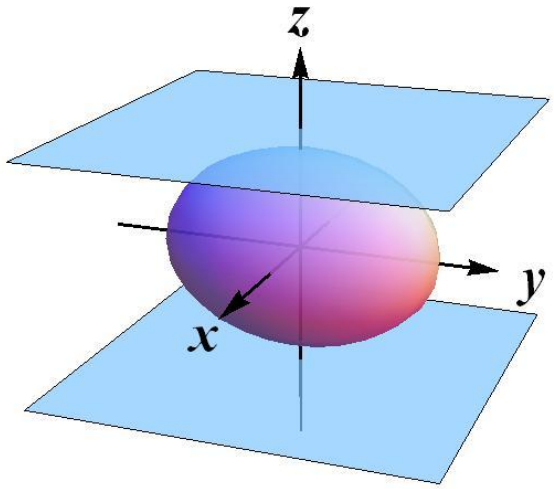
$\boxed{-c < h < c}$



$\boxed{h = \pm c}$



$\boxed{h < -c \text{ ili } h > c}$

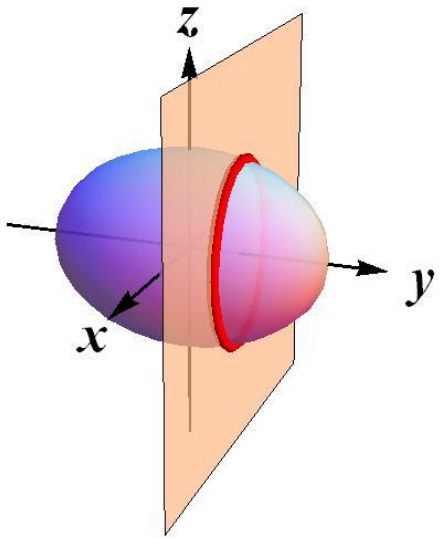


Klasifikacija ploha drugog reda

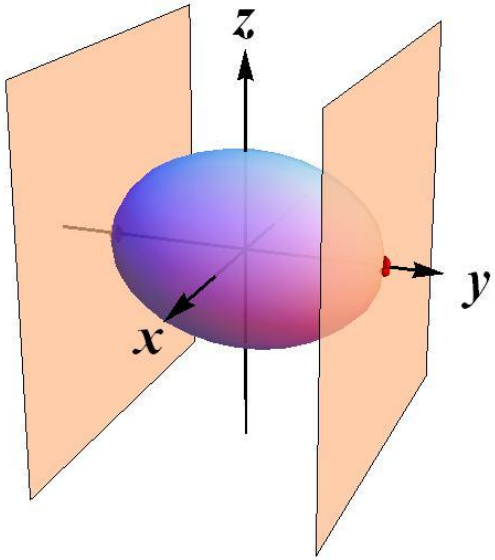
Presjeci **elipsoida** sa ravninama $y = h$.

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = h \\ \hline \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2} \end{array}$$

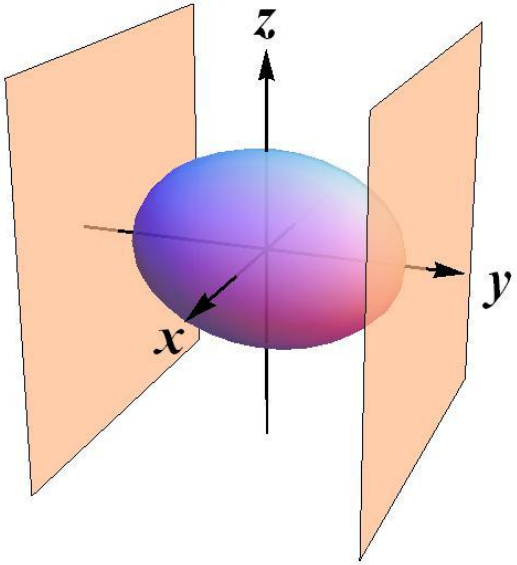
$\boxed{-b < h < b}$



$\boxed{h = \pm b}$



$\boxed{h < -b \text{ ili } h > b}$

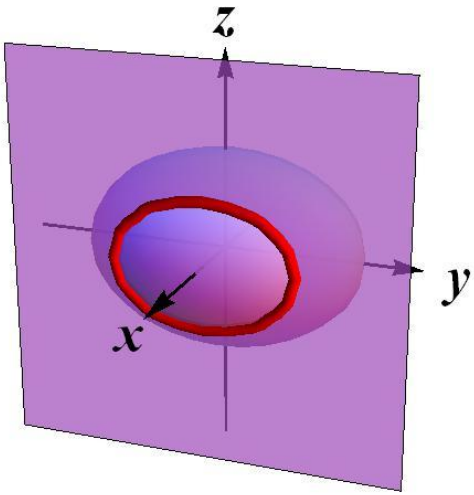


Klasifikacija ploha drugog reda

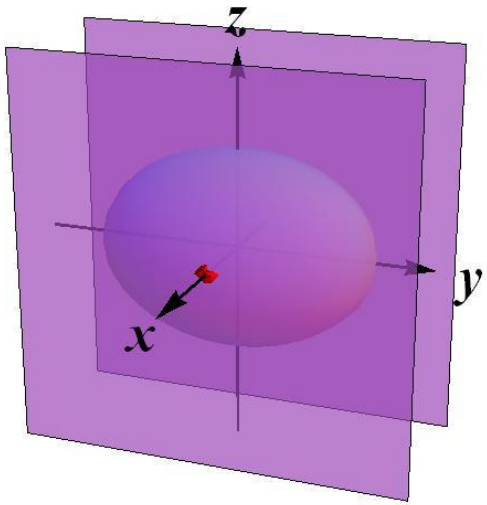
Presjeci **elipsoida** sa ravninama $x = h$.

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = h \\ \hline \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \end{array}$$

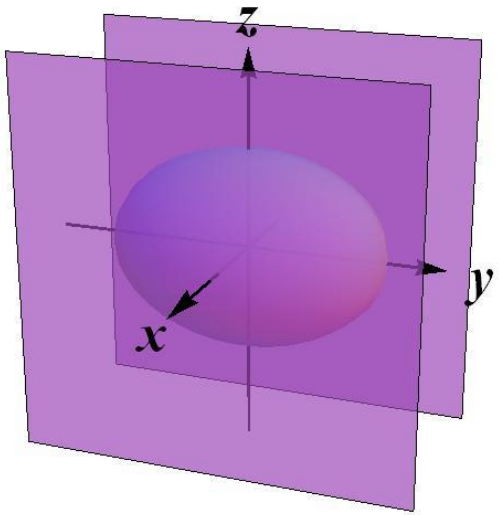
$\boxed{-a < h < a}$



$\boxed{h = \pm a}$



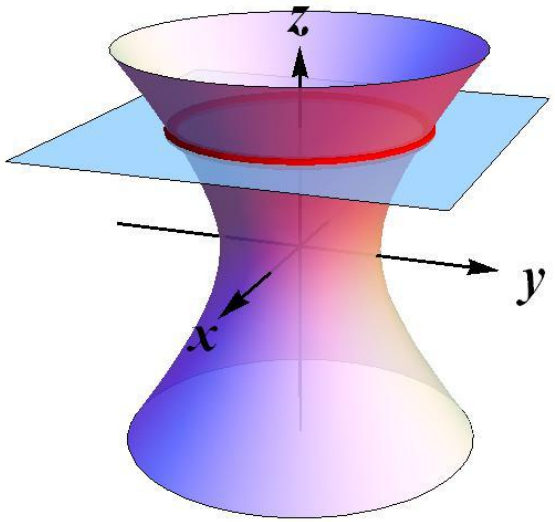
$\boxed{h < -a \text{ ili } h > a}$



Klasifikacija ploha drugog reda

Presjeci **jednoplošnog hiperboloida** sa ravninama $z = h$.

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = h \\ \hline \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \end{array}$$

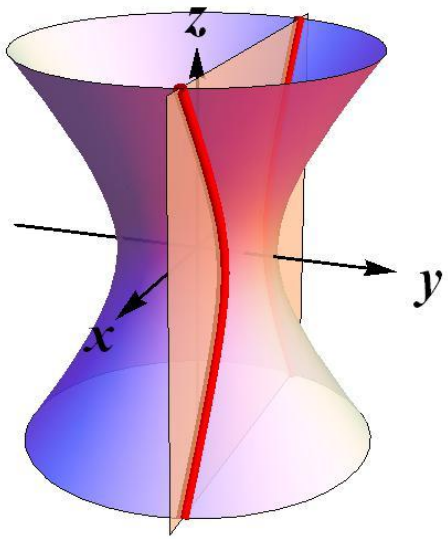


Klasifikacija ploha drugog reda

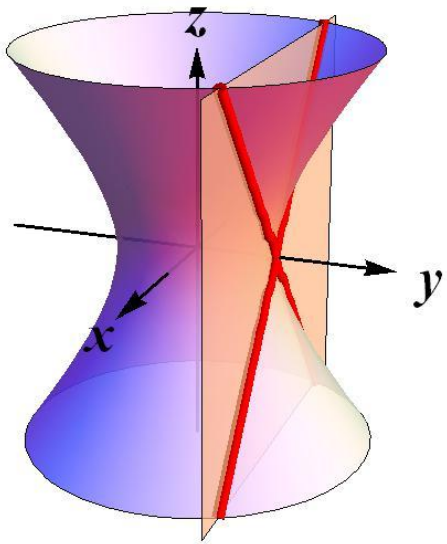
Presjeci **jednoplošnog hiperboloida** sa ravninama $y = h$.

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = h \\ \hline \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2} \end{array}$$

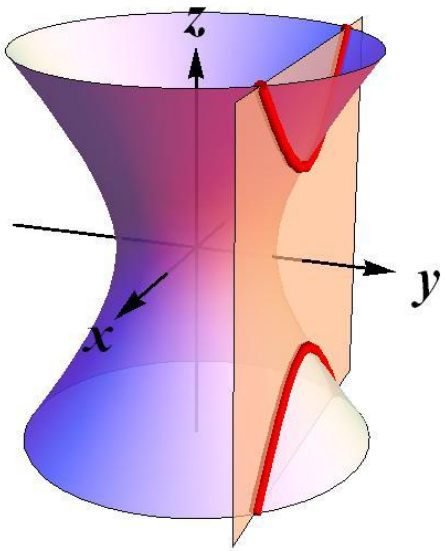
$\boxed{-b < h < b}$



$\boxed{h = \pm b}$



$\boxed{h < -b \text{ ili } h > b}$

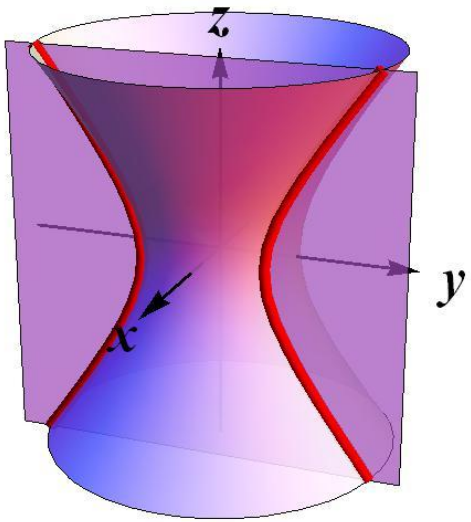


Klasifikacija ploha drugog reda

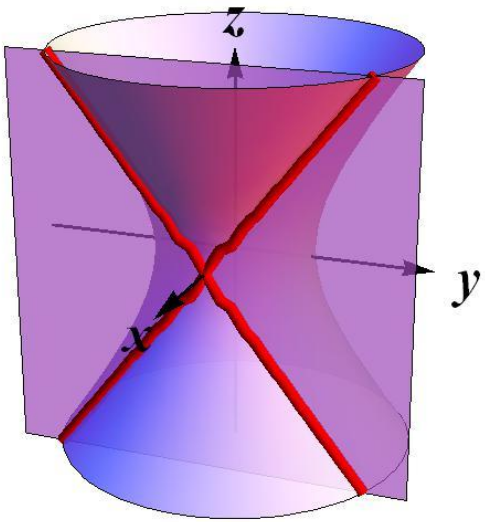
Presjeci **jednoplošnog hiperboloida** sa ravninama $x = h$.

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = h \\ \hline \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \end{array}$$

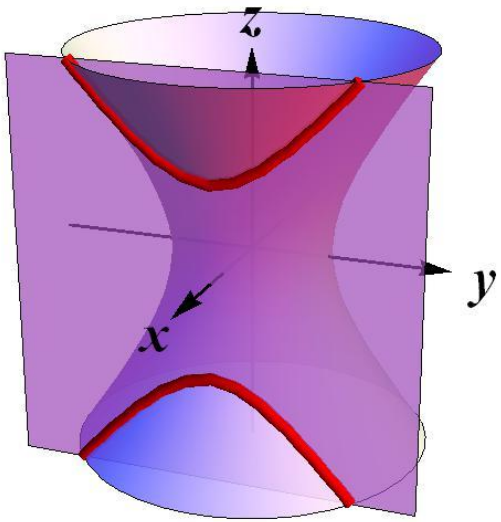
$\boxed{-a < h < a}$



$\boxed{h = \pm a}$



$\boxed{h < -a \text{ ili } h > a}$

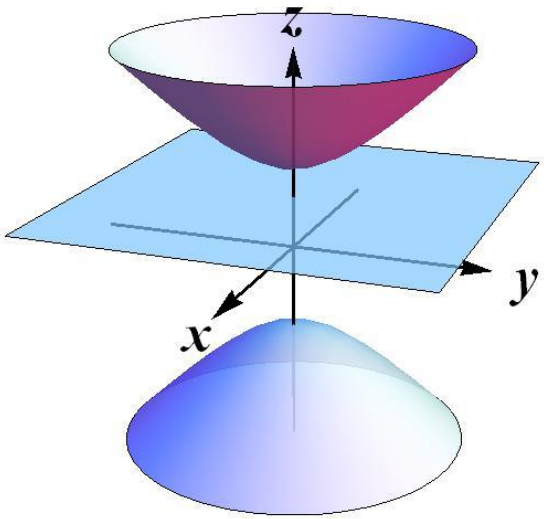


Klasifikacija ploha drugog reda

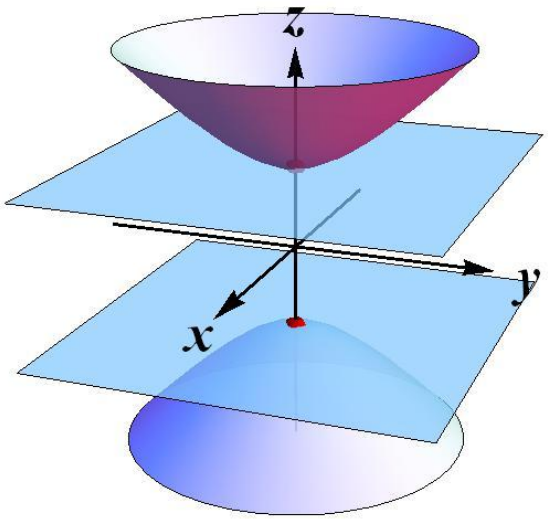
Presjeci **dvoplošnog hiperboloida** sa ravninama $z = h$.

$$\begin{array}{r} -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = h \\ \hline \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \end{array}$$

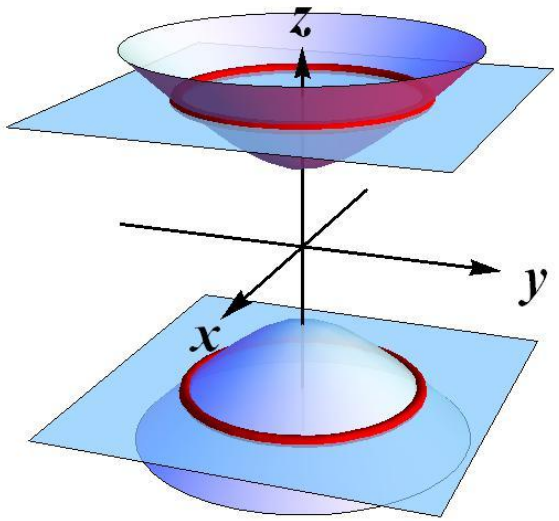
$\boxed{-c < h < c}$



$\boxed{h = \pm c}$



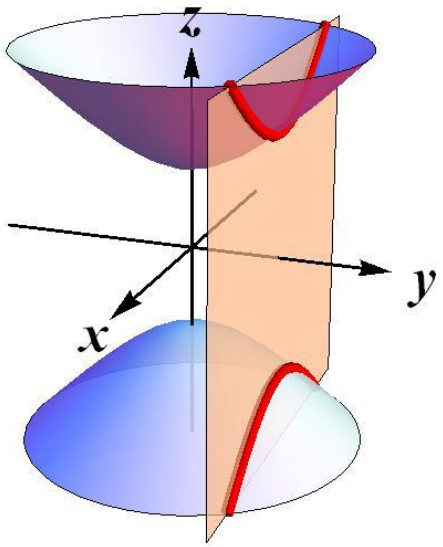
$\boxed{h < -c \text{ ili } h > c}$



Klasifikacija ploha drugog reda

Presjeci **dvoplošnog hiperboloida** sa ravninama $y = h$.

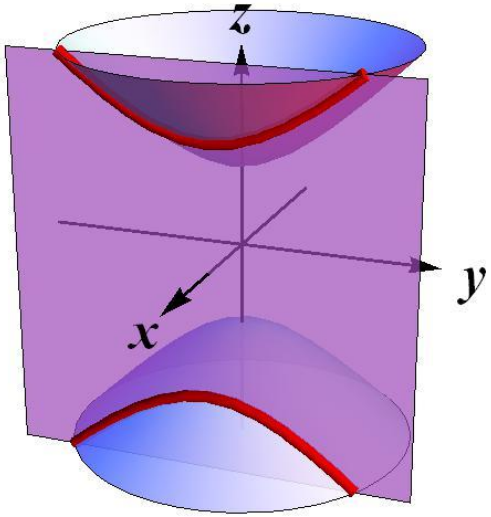
$$\begin{array}{r} -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = h \\ \hline -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2} \end{array}$$



Klasifikacija ploha drugog reda

Presjeci **dvoplošnog hiperboloida** sa ravninama $x = h$.

$$\begin{array}{r} -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = h \\ \hline -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{h^2}{a^2} \end{array}$$

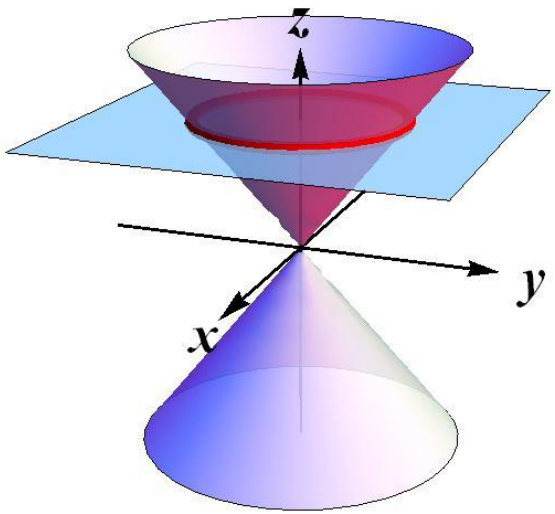


Klasifikacija ploha drugog reda

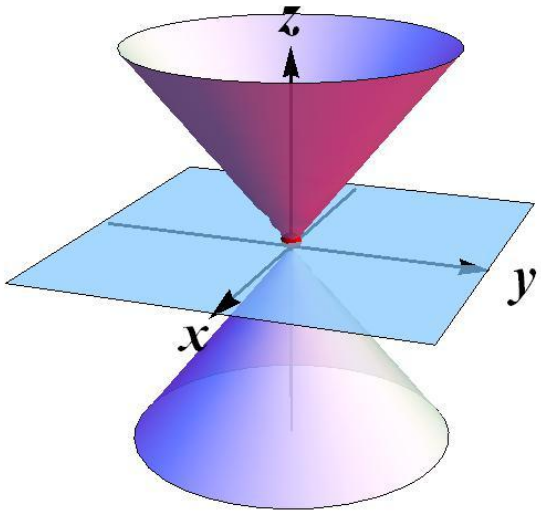
Presjeci **konusa** sa ravninama $z = h$.

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ z = h \\ \hline \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} \end{array}$$

$\boxed{h \neq 0}$



$\boxed{h = 0}$

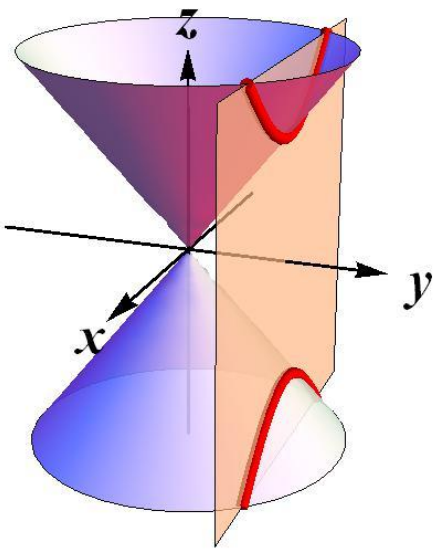


Klasifikacija ploha drugog reda

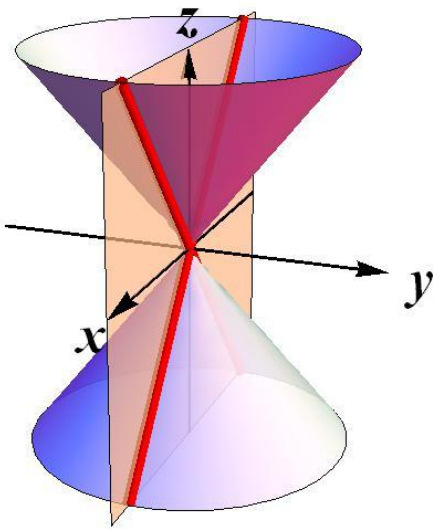
Presjeci **konusa** sa ravninama $y = h$.

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = h \\ \hline -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{b^2} \end{array}$$

$\boxed{h \neq 0}$



$\boxed{h = 0}$

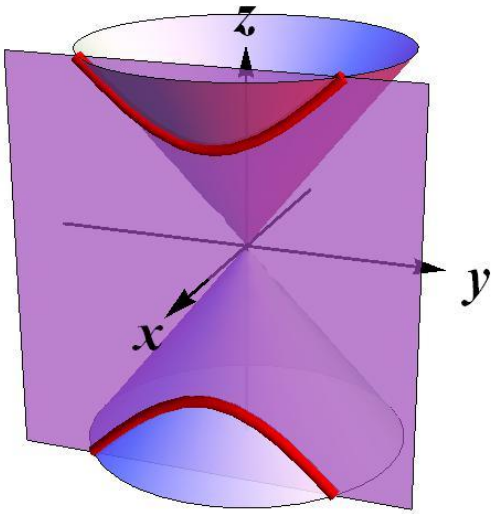


Klasifikacija ploha drugog reda

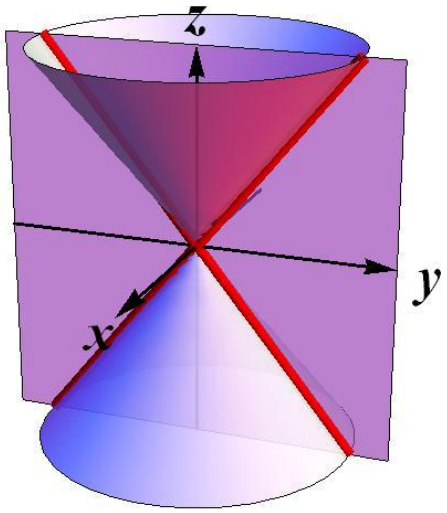
Presjeci **konusa** sa ravninama $x = h$.

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = h \\ \hline -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2} \end{array}$$

$\boxed{h \neq 0}$



$\boxed{h = 0}$

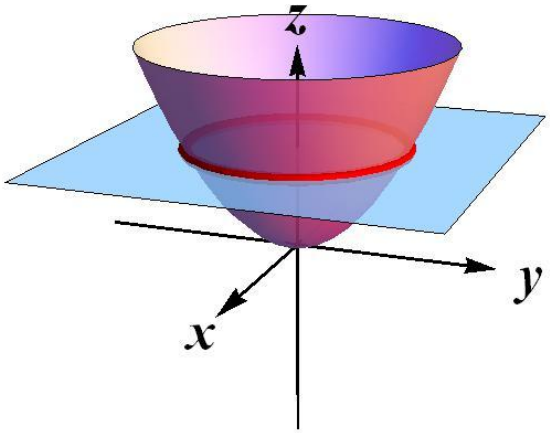


Klasifikacija ploha drugog reda

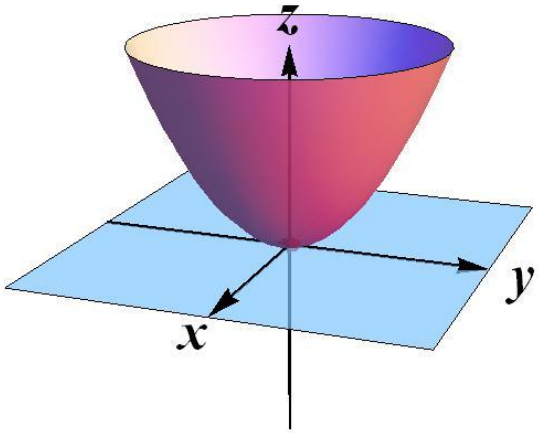
Presjeci **eliptičkog paraboloida** sa ravninama $z = h$.

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \\ z = h \\ \hline \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h \end{array}$$

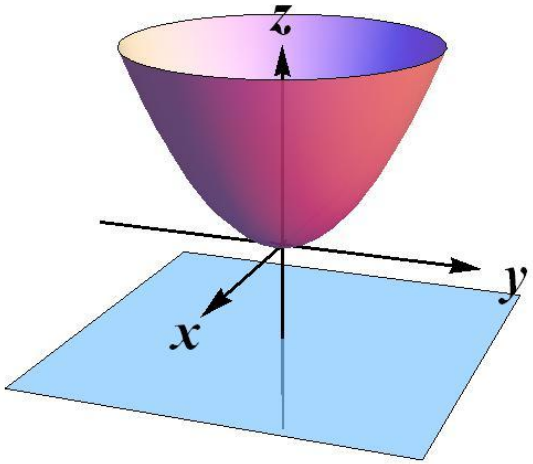
$\boxed{h > 0}$



$\boxed{h = 0}$



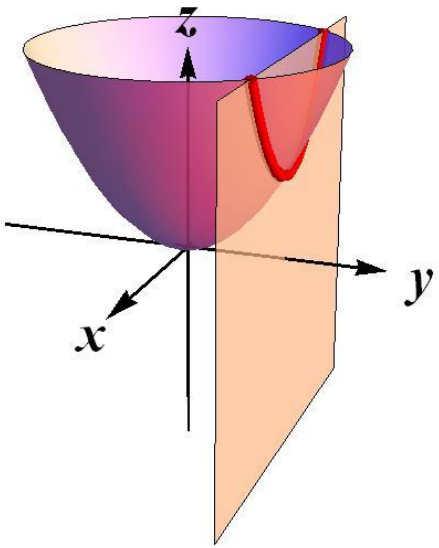
$\boxed{h < 0}$



Klasifikacija ploha drugog reda

Presjeci **eliptičkog paraboloida** sa ravninama $y = h$.

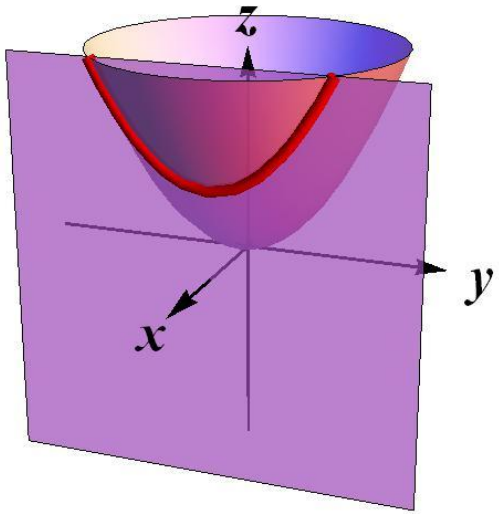
$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \\ y = h \\ \hline \frac{x^2}{a^2} = z - \frac{h^2}{b^2} \end{array}$$



Klasifikacija ploha drugog reda

Presjeci **eliptičkog paraboloida** sa ravninama $x = h$.

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \\ x = h \\ \hline \frac{y^2}{b^2} = z - \frac{h^2}{a^2} \end{array}$$

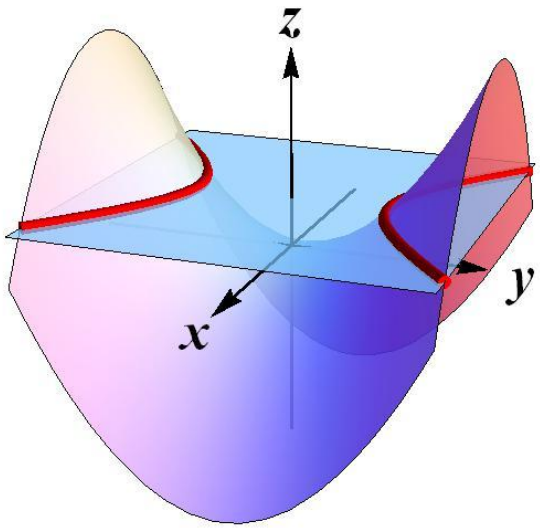


Klasifikacija ploha drugog reda

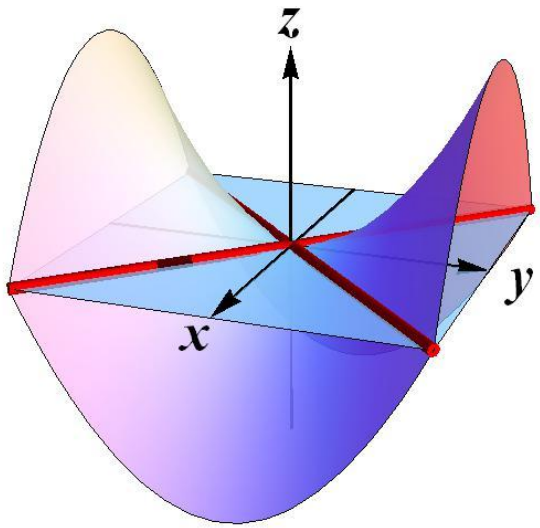
Presjeci **hiperboličkog paraboloida** sa ravninama $z = h$.

$$\begin{array}{r} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \\ z = h \\ \hline -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h \end{array}$$

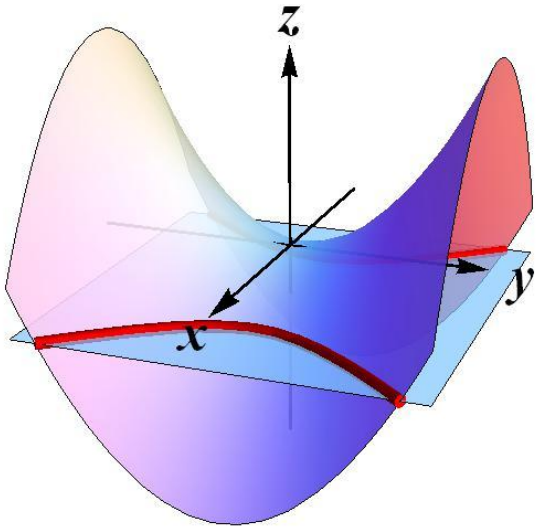
$\boxed{h > 0}$



$\boxed{h = 0}$



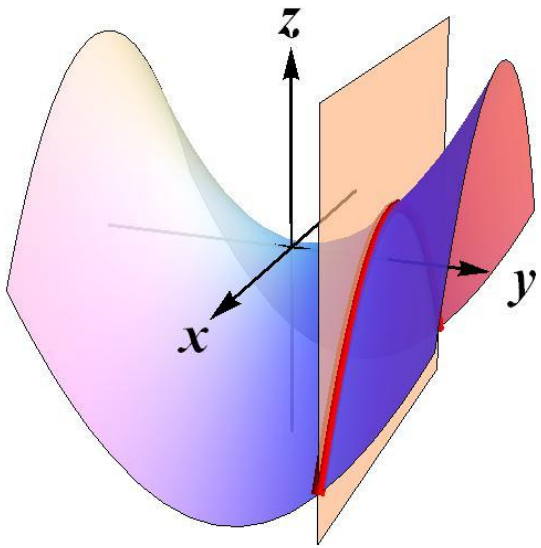
$\boxed{h < 0}$



Klasifikacija ploha drugog reda

Presjeci **hiperboličkog paraboloida** sa ravninama $y = h$.

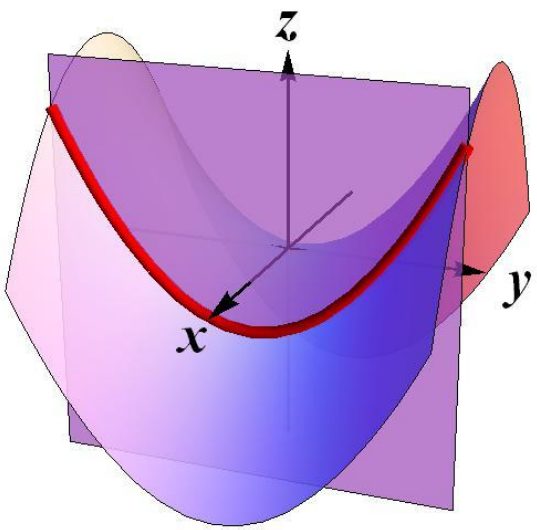
$$\begin{array}{r} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \\ y = h \\ \hline \frac{x^2}{a^2} = z + \frac{h^2}{b^2} \end{array}$$



Klasifikacija ploha drugog reda

Presjeci **hiperboličkog paraboloida** sa ravninama $x = h$.

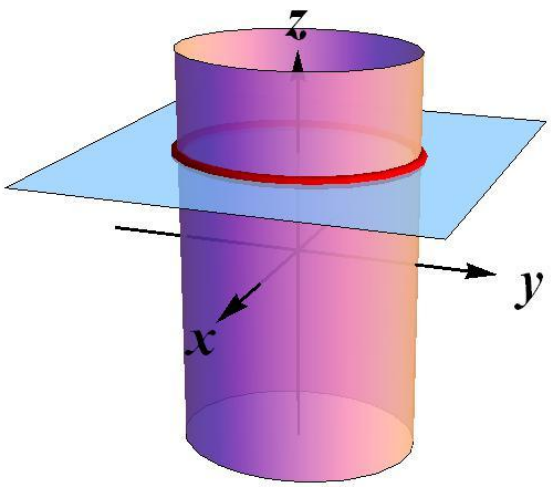
$$\begin{array}{r} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \\ x = h \\ \hline \frac{y^2}{b^2} = z + \frac{h^2}{a^2} \end{array}$$



Klasifikacija ploha drugog reda

Presjeci **eliptičkog cilindra** sa ravninama $z = h$.

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = h \\ \hline \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{array}$$

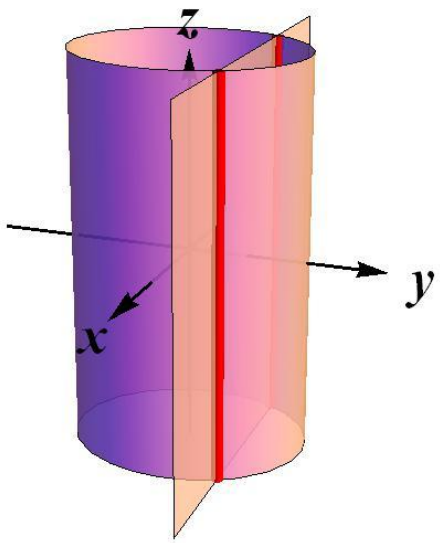


Klasifikacija ploha drugog reda

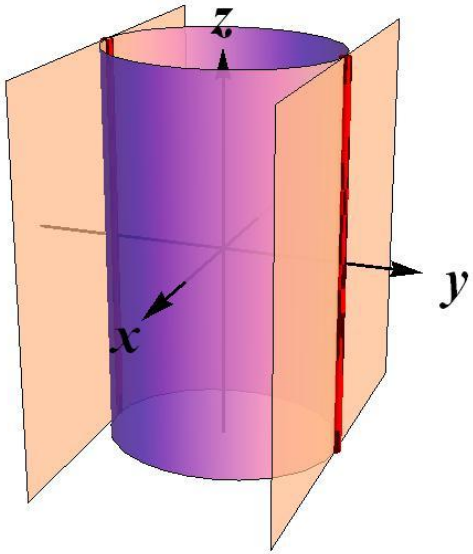
Presjeci **eliptičkog cilindra** sa ravninama $y = h$.

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = h \\ \hline \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2} \end{array}$$

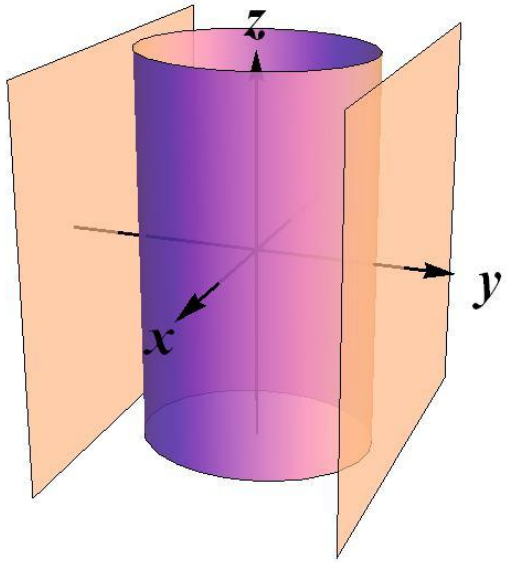
$\boxed{-b < h < b}$



$\boxed{h = \pm b}$



$\boxed{h < -b \text{ ili } h > b}$

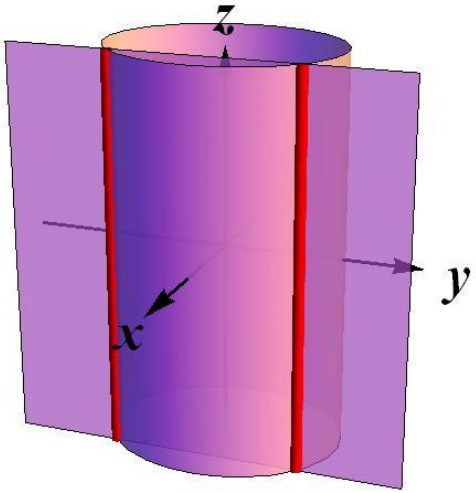


Klasifikacija ploha drugog reda

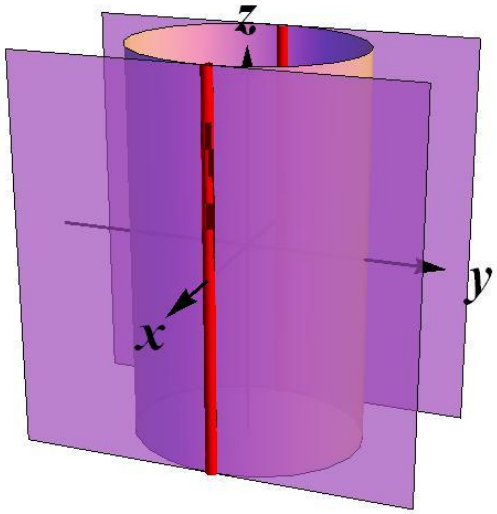
Presjeci **eliptičkog cilindra** sa ravninama $x = h$.

$$\begin{array}{r} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = h \\ \hline \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \end{array}$$

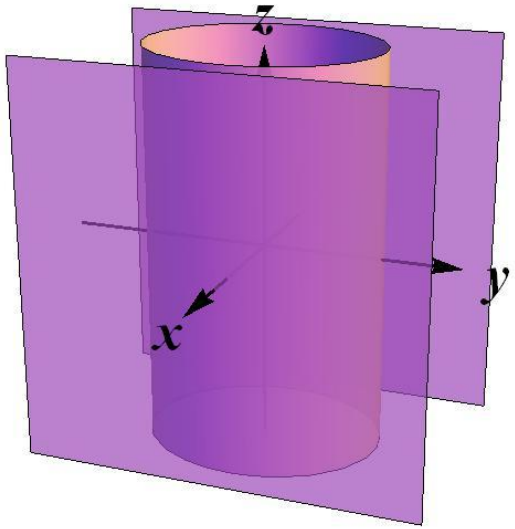
$\boxed{-a < h < a}$



$\boxed{h = \pm a}$



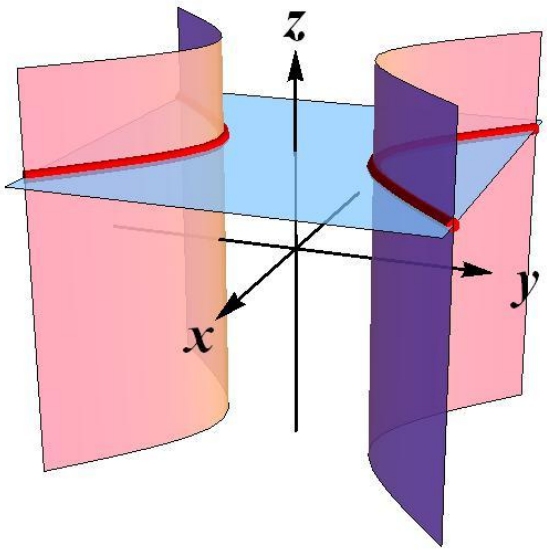
$\boxed{h < -a \text{ ili } h > a}$



Klasifikacija ploha drugog reda

Presjeci **hiperboličkog cilindra** sa ravninama $z = h$.

$$\begin{array}{r} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = h \\ \hline -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{array}$$

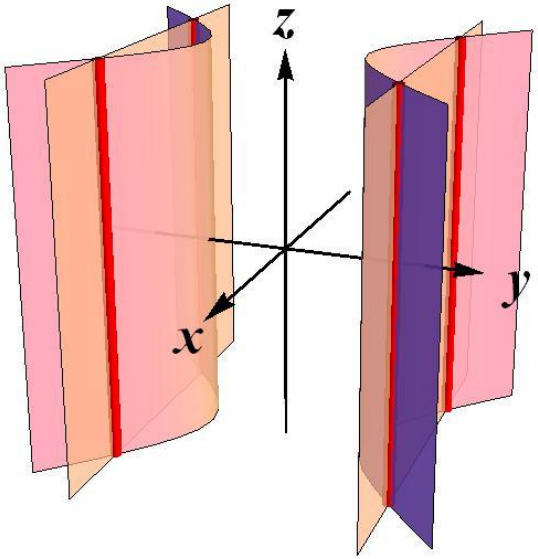


Klasifikacija ploha drugog reda

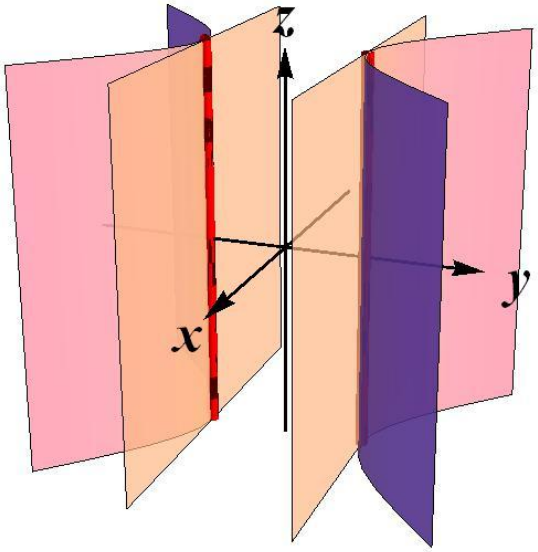
Presjeci **hiperboličkog cilindra** sa ravninama $y = h$.

$$\begin{array}{r} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = h \\ \hline \frac{x^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2} - 1 \end{array}$$

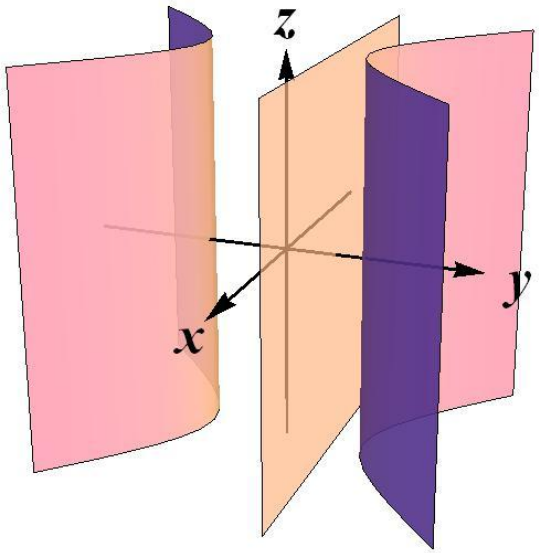
$\boxed{h < -b \text{ ili } h > b}$



$\boxed{h = \pm b}$



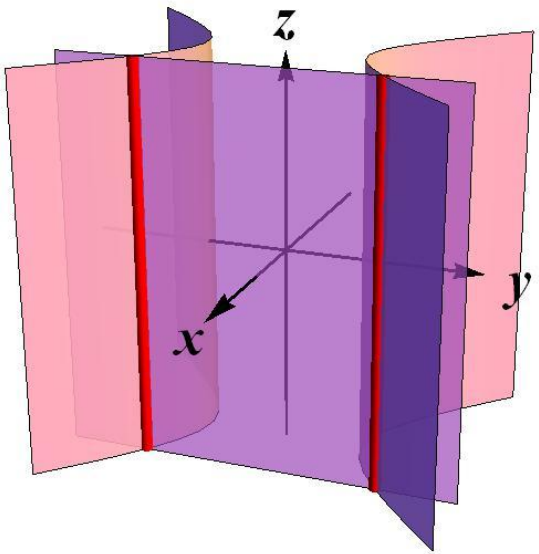
$\boxed{-b < h < b}$



Klasifikacija ploha drugog reda

Presjeci **hiperboličkog cilindra** sa ravninama $x = h$.

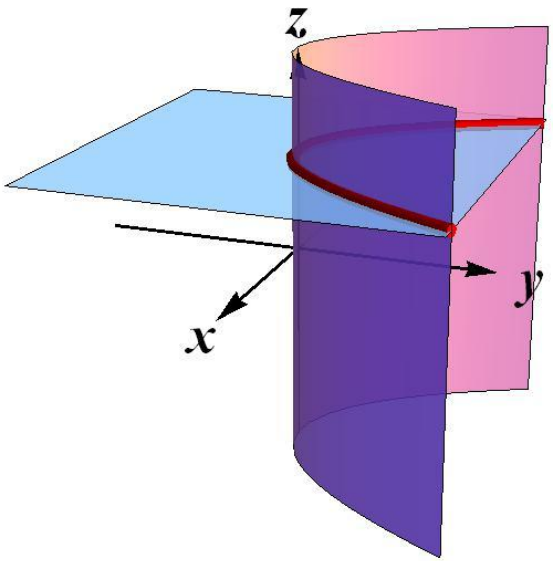
$$\begin{array}{r} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = h \\ \hline \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{a^2} + 1 \end{array}$$



Klasifikacija ploha drugog reda

Presjeci **paraboličkog cilindra** sa ravninama $z = h$.

$$\begin{array}{c} y = \frac{x^2}{a^2} \\ z = h \\ \hline y = \frac{x^2}{a^2} \end{array}$$

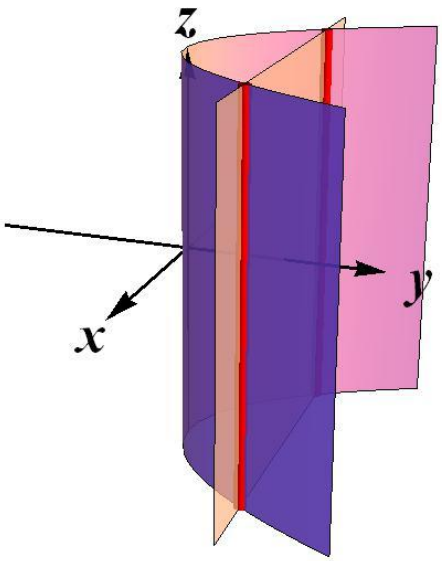


Klasifikacija ploha drugog reda

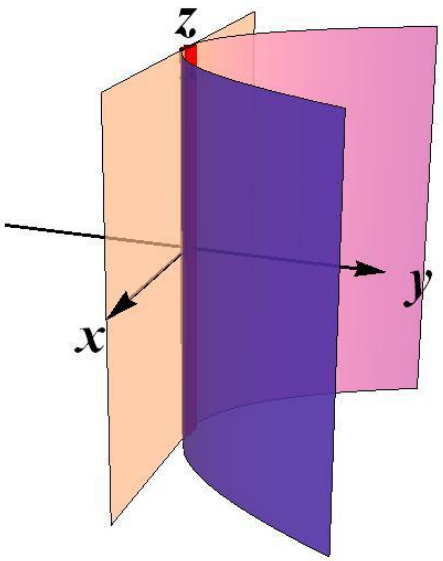
Presjeci **paraboličkog cilindra** sa ravninama $y = h$.

$$\begin{array}{c} y = \frac{x^2}{a^2} \\ y = h \\ \hline \frac{x^2}{a^2} = h \end{array}$$

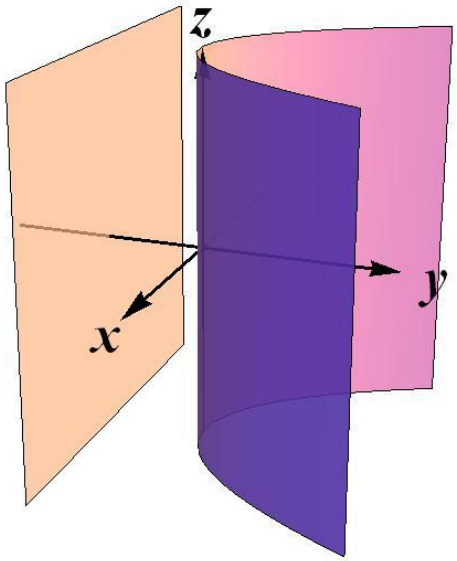
$\boxed{h > 0}$



$\boxed{h = 0}$



$\boxed{h < 0}$



Klasifikacija ploha drugog reda

Presjeci **paraboličkog cilindra** sa ravninama $x = h$.

$$\begin{array}{c} y = \frac{x^2}{a^2} \\ x = h \\ \hline y = \frac{h^2}{a^2} \end{array}$$