

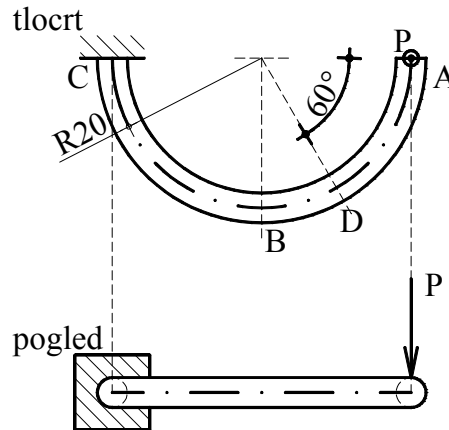
2.6. Polukružni aluminijski štap okruglog poprečnog presjeka, $d=4\text{cm}$, upet je na jednom kraju. Na drugom kraju je opterećen silom P . Potrebno je:

- odrediti dijagrame momenta savijanja i momenta torzije na nosaču
- u najviše naprezanoj točki presjeka "D" treba odrediti glavna naprezanja
- u presjecima "B" i "C" treba odrediti normalna i posmična naprezanja
- za presjeke "B", "C" i "D" treba izračunati ekvivalentna naprezanja jednoosnom stanju prema 3. teoriji (Coulombova teorija maksimalnih posmičnih naprezanja)

$$P = 1.0\text{kN}$$

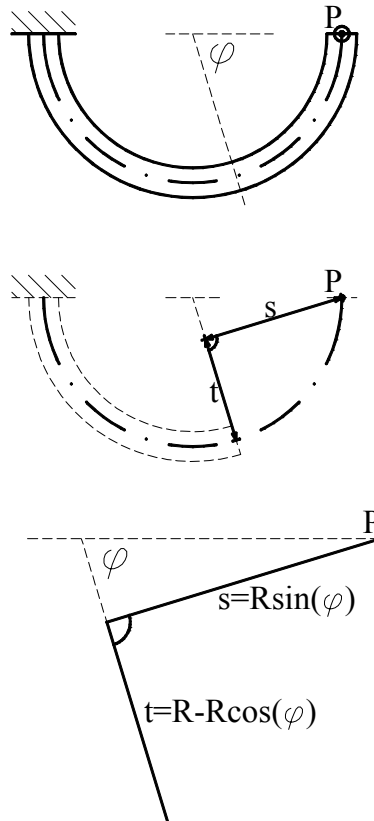
$$d = 4\text{cm}$$

$$R = 20\text{cm}$$



Potrebno je odrediti dijagrame momenata savijanja i momenata torzije na nosaču. Promatramo li udaljenost sile P od normale na poprečni presjek okomito na normalu možemo odrediti torzijski utjecaj sile po nosaču, a ako promatramo udaljenost sile P od normale na poprečni presjek u smjeru normale možemo odrediti utjecaj momenta savijanja.

Utjecaj sile u nekom proizvoljnom presjeku za kut otklona možemo prikazati kao udaljenost " s " od momenta savijanja i " t " od momenta torzije.



Moment savijanja u proizvoljnom presjeku sada predstavlja $M_S = P \cdot s = P \cdot R \sin \varphi$

A moment torzije predstavlja $M_T = P \cdot t = P \cdot (R - R \cos \varphi) = P \cdot R(1 - \cos \varphi)$

a) dijagrami momenta savijanja i momenta torzije

Vrijednosti u karakterističnim točkama

Točka "D"

$$\varphi = 60^\circ$$

$$M_S = P \cdot R \cdot \sin \varphi = 1\text{kN} \cdot 20\text{cm} \cdot \sin 60^\circ \\ = 17.32\text{kNcm}$$

$$M_T = P \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) = 1\text{kN} \cdot 20\text{cm} \cdot (1 - \cos 60^\circ) \\ = 10.00\text{kNcm}$$

Točka "B"

$$\varphi = 90^\circ$$

$$M_S = P \cdot R \cdot \sin \varphi = 1\text{kN} \cdot 20\text{cm} \cdot \sin 90^\circ \\ = 20.00\text{kNcm}$$

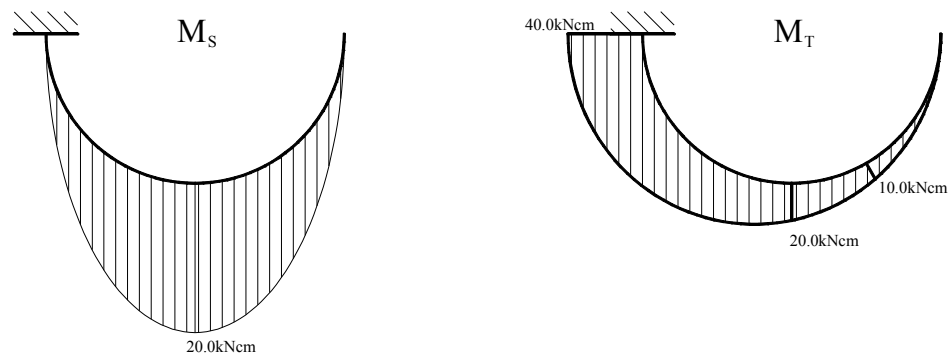
$$M_T = P \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) = 1\text{kN} \cdot 20\text{cm} \cdot (1 - \cos 90^\circ) \\ = 20.00\text{kNcm}$$

Točka "C"

$$\varphi = 180^\circ$$

$$M_S = P \cdot R \cdot \sin \varphi = 1\text{kN} \cdot 20\text{cm} \cdot \sin 180^\circ \\ = 0$$

$$M_T = P \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) = 1\text{kN} \cdot 20\text{cm} \cdot (1 - \cos 180^\circ) \\ = 40.00\text{kNcm}$$



b) glavna naprezanja u točki "D"

Karakteristike poprečnog presjeka

$$W = \frac{d^3 \pi}{32} = 6.28\text{cm}^3$$

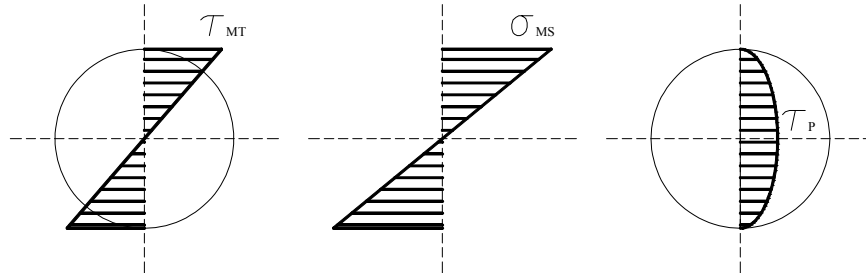
$$W_p = \frac{d^3 \pi}{16} = 12.56\text{cm}^3 = 2W$$

$$I = \frac{d^4 \pi}{64} = 12.56\text{cm}^4$$

$$\sigma = \frac{M_s}{W} = \frac{17.32 \text{ kNcm}}{6.28 \text{ cm}^3} = 2.76 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_{Mt} = \frac{M_T}{W_p} = \frac{10.00 \text{ kNcm}}{12.56 \text{ cm}^3} = 0.804 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_p = \frac{P \cdot S}{I \cdot d} = 0.1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$



Kritične točke u presjeku su gornji ili donji rub, jer tu djeluje najveće normalno naprezanje od momenta savijanja i najveće posmično naprezanje od momenta torzije, dok je tu posmično naprezanje od poprečne sile nula.

Analitičko određivanje glavnih naprezanja:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} =$$

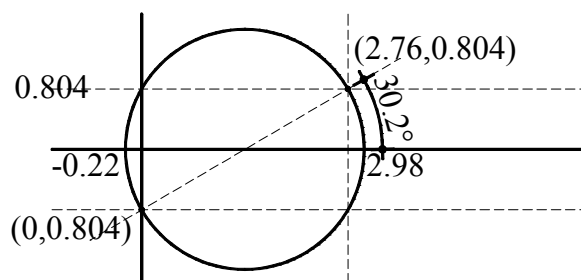
$$= \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma)^2 + 4\tau_{Mt}^2}$$

$$\sigma_1 = +2.98 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_2 = -0.22 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\text{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma} = 0.582 \Rightarrow \alpha = 15.10^\circ$$

Mohrova kružnice:



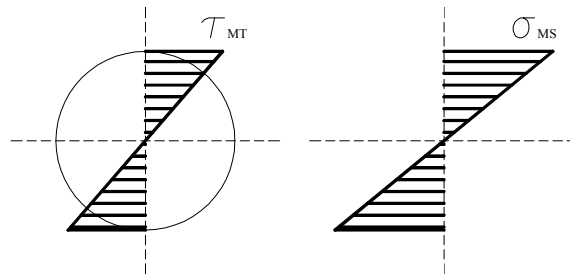
c) Normalna i posmična naprezanja u presjecima "B" i "C"

$$\sigma_B = \frac{M_S}{W} = \frac{20.0\text{kNcm}}{6.28\text{cm}^3} = 3.18 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_{Mt.B} = \frac{M_T}{W_p} = \frac{20.00\text{kNcm}}{12.56\text{cm}^3} = 1.59 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_C = 0$$

$$\tau_{Mt.C} = \frac{M_T}{W_p} = \frac{40.00\text{kNcm}}{12.56\text{cm}^3} = 3.18 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$



d) Ekvivalentna jednoosna naprezanja prema teoriji maksimalnih posmičnih naprezanja

$$\sigma_{ekv} = \sigma_{max} - \sigma_{min}$$

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_x = \frac{M_S}{W} = \sigma$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau = \frac{M_T}{W_p}$$

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{ekv} = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right) - \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right) = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma = \frac{M_S}{W}$$

$$\tau = \frac{M_T}{W_p}$$

Za okrugli poprečni presjek vrijedi:

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\left(\frac{M_S}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_T}{W_p}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M_S}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_T}{2W}\right)^2} = \sqrt{\frac{M_S^2 + M_T^2}{W^2}}$$

Presjek "B"

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{20^2 + 20^2}{6.28^2}} = 4.50 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Presjek "C"

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{0^2 + 40^2}{6.28^2}} = 6.37 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Presjek "D"

Kako smo izračunali glavna naprezanja, možemo iz uvrstiti u formulu:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}} = 2.98 - (-0.22) = 3.20 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Da smo imali zadano dopušteno naprezanje trebali bi ga usporediti s izračunatim ekvivalentnim naprežanjem i to na način $\sigma_{\text{ekv}} \leq \sigma_{\text{dop}}$.