Svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti

Jelena Sedlar

Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

Definicija i osnovna svojstva

Definicija i osnovna svojstva

Napomena.

Definicija i osnovna svojstva

Napomena. Razmatrat ćemo samo operatore kojima je domena i kodomena jednaka (dakle, kojima je pripadna matrica kvadratna).

Definicija i osnovna svojstva

Napomena. Razmatrat ćemo samo operatore kojima je domena i kodomena jednaka (dakle, kojima je pripadna matrica kvadratna).

Uočimo:

Definicija i osnovna svojstva

Napomena. Razmatrat ćemo samo operatore kojima je domena i kodomena jednaka (dakle, kojima je pripadna matrica kvadratna).

Uočimo:

- matrični prikaz operatora ovisi o odabranom paru baza,

Definicija i osnovna svojstva

Napomena. Razmatrat ćemo samo operatore kojima je domena i kodomena jednaka (dakle, kojima je pripadna matrica kvadratna).

Uočimo:

- matrični prikaz operatora ovisi o odabranom paru baza,
- prikaz operatora dijagonalnom matricom je pogodan za računanje.

Definicija i osnovna svojstva

Napomena. Razmatrat ćemo samo operatore kojima je domena i kodomena jednaka (dakle, kojima je pripadna matrica kvadratna).

Uočimo:

- matrični prikaz operatora ovisi o odabranom paru baza,
- prikaz operatora dijagonalnom matricom je pogodan za računanje.

Zaključujemo:

Definicija i osnovna svojstva

Napomena. Razmatrat ćemo samo operatore kojima je domena i kodomena jednaka (dakle, kojima je pripadna matrica kvadratna).

Uočimo:

- matrični prikaz operatora ovisi o odabranom paru baza,
- prikaz operatora dijagonalnom matricom je pogodan za računanje.

Zaključujemo:

- u interesu nam je pronaći takav par baza u kojem će operator imati matricu što sličniju dijagonalnoj.

Definicija i osnovna svojstva

Neka je:

Definicija i osnovna svojstva

Neka je:

- X vektorski prostor,

Definicija i osnovna svojstva

Neka je:

- X vektorski prostor,
- $A : X \to X$ linearni operator,

Definicija i osnovna svojstva

Neka je:

- X vektorski prostor,
- $A : X \to X$ linearni operator,
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza prostora X

Definicija i osnovna svojstva

Neka je:

- X vektorski prostor,
- $A : X \to X$ linearni operator,
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza prostora X sa svojstvom da je

$$A(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

Definicija i osnovna svojstva

Neka je:

- X vektorski prostor,
- $A : X \to X$ linearni operator,
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza prostora X sa svojstvom da je

$$A(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, A(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

Definicija i osnovna svojstva

Neka je:

- X vektorski prostor,
- $A : X \to X$ linearni operator,
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza prostora X sa svojstvom da je

$$A(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, A(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots,$$

Definicija i osnovna svojstva

Neka je:

- X vektorski prostor,
- $A : X \to X$ linearni operator,
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza prostora X sa svojstvom da je

$$A(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, A(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, A(\mathbf{e}_n) = \lambda_n \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Definicija i osnovna svojstva

Neka je:

- X vektorski prostor,
- $A : X \to X$ linearni operator,
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza prostora X sa svojstvom da je

$$A(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, A(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, A(\mathbf{e}_n) = \lambda_n \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Tada je matrica tog operatora očito

$$\mathbf{A} =$$

Definicija i osnovna svojstva

Neka je:

- X vektorski prostor,
- $A : X \to X$ linearni operator,
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza prostora X sa svojstvom da je

$$A(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, A(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, A(\mathbf{e}_n) = \lambda_n \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Tada je matrica tog operatora očito

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Definicija i osnovna svojstva

Zaključujemo:

Definicija i osnovna svojstva

Zaključujemo:

- zanimljivi su nam vektori $\mathbf{x} \in X$ za koje vrijedi $A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$.

Definicija i osnovna svojstva

Zaključujemo:

- zanimljivi su nam vektori $\mathbf{x} \in X$ za koje vrijedi $A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$.

Definicija. Neka je X vektorski prostor, te neka je $A : X \to X$ linearni operator.

Definicija i osnovna svojstva

Zaključujemo:

- zanimljivi su nam vektori $\mathbf{x} \in X$ za koje vrijedi $A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$.

Definicija. Neka je X vektorski prostor, te neka je $A : X \to X$ linearni operator. Kažemo da je vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *svojstveni vektor* operatora A

Definicija i osnovna svojstva

Zaključujemo:

- zanimljivi su nam vektori $\mathbf{x} \in X$ za koje vrijedi $A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$.

Definicija. Neka je X vektorski prostor, te neka je $A : X \to X$ linearni operator. Kažemo da je vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *svojstveni vektor* operatora A ako postoji broj $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}.$$

Definicija i osnovna svojstva

Zaključujemo:

- zanimljivi su nam vektori $\mathbf{x} \in X$ za koje vrijedi $A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$.

Definicija. Neka je X vektorski prostor, te neka je $A : X \to X$ linearni operator. Kažemo da je vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *svojstveni vektor* operatora A ako postoji broj $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}.$$

Broj $\lambda \in \mathbb{R}$ naziva se *svojstvena vrijednost* koja odgovara svojstvenom vektoru $\mathbf{x}$.

Definicija i osnovna svojstva

Zaključujemo:

- zanimljivi su nam vektori $\mathbf{x} \in X$ za koje vrijedi $A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$.

Definicija. Neka je X vektorski prostor, te neka je $A : X \to X$ linearni operator. Kažemo da je vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *svojstveni vektor* operatora A ako postoji broj $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}.$$

Broj $\lambda \in \mathbb{R}$ naziva se *svojstvena vrijednost* koja odgovara svojstvenom vektoru $\mathbf{x}$.

Uočimo da za svojstveni vektor $\mathbf{x}$ i svojstvenu vrijednost λ vrijedi:

Definicija i osnovna svojstva

Zaključujemo:

- zanimljivi su nam vektori $\mathbf{x} \in X$ za koje vrijedi $A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$.

Definicija. Neka je X vektorski prostor, te neka je $A : X \to X$ linearni operator. Kažemo da je vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *svojstveni vektor* operatora A ako postoji broj $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}.$$

Broj $\lambda \in \mathbb{R}$ naziva se *svojstvena vrijednost* koja odgovara svojstvenom vektoru $\mathbf{x}$.

Uočimo da za svojstveni vektor $\mathbf{x}$ i svojstvenu vrijednost λ vrijedi:

- mora biti $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

Definicija i osnovna svojstva

Zaključujemo:

- zanimljivi su nam vektori $\mathbf{x} \in X$ za koje vrijedi $A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$.

Definicija. Neka je X vektorski prostor, te neka je $A : X \to X$ linearni operator. Kažemo da je vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *svojstveni vektor* operatora A ako postoji broj $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}.$$

Broj $\lambda \in \mathbb{R}$ naziva se *svojstvena vrijednost* koja odgovara svojstvenom vektoru $\mathbf{x}$.

Uočimo da za svojstveni vektor $\mathbf{x}$ i svojstvenu vrijednost λ vrijedi:

- mora biti $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
- može biti $\lambda = 0$.

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ,

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \quad =$$

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') \quad = \quad A(\mathbf{x})+A(\mathbf{x}') =$$

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') \quad = \quad A(\mathbf{x})+A(\mathbf{x}') = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}' =$$

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') \quad = \quad A(\mathbf{x})+A(\mathbf{x}') = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}' = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{x}'),$$

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= A(\mathbf{x})+A(\mathbf{x}') = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}' = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{x}'), \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \end{aligned}$$

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= A(\mathbf{x})+A(\mathbf{x}') = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}' = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{x}'), \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha A(\mathbf{x}) = \end{aligned}$$

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= A(\mathbf{x})+A(\mathbf{x}') = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}' = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{x}'), \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha A(\mathbf{x}) = \alpha\lambda\mathbf{x} = \end{aligned}$$

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= A(\mathbf{x})+A(\mathbf{x}') = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}' = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{x}'), \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha A(\mathbf{x}) = \alpha\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= A(\mathbf{x})+A(\mathbf{x}') = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}' = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{x}'), \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha A(\mathbf{x}) = \alpha\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ovo znači da su:

1. vektori $\mathbf{x}+\mathbf{x}'$ i $\alpha\mathbf{x}$ također svojstveni vektori

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= A(\mathbf{x})+A(\mathbf{x}') = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}' = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{x}'), \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha A(\mathbf{x}) = \alpha\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ovo znači da su:

1. vektori $\mathbf{x}+\mathbf{x}'$ i $\alpha\mathbf{x}$ također svojstveni vektori sa svojstvenom vrijednošću λ.

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= A(\mathbf{x})+A(\mathbf{x}') = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}' = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{x}'), \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha A(\mathbf{x}) = \alpha\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ovo znači da su:

1. vektori $\mathbf{x}+\mathbf{x}'$ i $\alpha\mathbf{x}$ također svojstveni vektori sa svojstvenom vrijednošću λ.
2. skup svojstvenih vektora s **<u>istom</u>** svojstvenom vrijednošću λ vektorski potprostor od X.

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= A(\mathbf{x})+A(\mathbf{x}') = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}' = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{x}'), \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha A(\mathbf{x}) = \alpha\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ovo znači da su:

1. vektori $\mathbf{x}+\mathbf{x}'$ i $\alpha\mathbf{x}$ također svojstveni vektori sa svojstvenom vrijednošću λ.
2. skup svojstvenih vektora s **istom** svojstvenom vrijednošću λ vektorski potprostor od X.

No, svojstveni vektori $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ i $\alpha\mathbf{x}$ su **linearno zavisni** od vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$.

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= A(\mathbf{x})+A(\mathbf{x}') = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}' = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{x}'), \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha A(\mathbf{x}) = \alpha\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ovo znači da su:

1. vektori $\mathbf{x}+\mathbf{x}'$ i $\alpha\mathbf{x}$ također svojstveni vektori sa svojstvenom vrijednošću λ.
2. skup svojstvenih vektora s **istom** svojstvenom vrijednošću λ vektorski potprostor od X.

No, svojstveni vektori $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ i $\alpha\mathbf{x}$ su **linearno zavisni** od vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$.

Nama je interesantno pronaći što više **linearno nezavisnih** svojstvenih vektora!

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= A(\mathbf{x})+A(\mathbf{x}') = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}' = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{x}'), \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha A(\mathbf{x}) = \alpha\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ovo znači da su:

1. vektori $\mathbf{x}+\mathbf{x}'$ i $\alpha\mathbf{x}$ također svojstveni vektori sa svojstvenom vrijednošću λ.
2. skup svojstvenih vektora s **<u>istom</u>** svojstvenom vrijednošću λ vektorski potprostor od X.

Definicija.

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= A(\mathbf{x})+A(\mathbf{x}') = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}' = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{x}'), \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha A(\mathbf{x}) = \alpha\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ovo znači da su:

1. vektori $\mathbf{x}+\mathbf{x}'$ i $\alpha\mathbf{x}$ također svojstveni vektori sa svojstvenom vrijednošću λ.
2. skup svojstvenih vektora s **istom** svojstvenom vrijednošću λ vektorski potprostor od X.

Definicija. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se *spektar* operatora A

Definicija i osnovna svojstva

Neka su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću λ, te neka je $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{x}') &= A(\mathbf{x})+A(\mathbf{x}') = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}' = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{x}'), \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha A(\mathbf{x}) = \alpha\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ovo znači da su:

1. vektori $\mathbf{x}+\mathbf{x}'$ i $\alpha\mathbf{x}$ također svojstveni vektori sa svojstvenom vrijednošću λ.
2. skup svojstvenih vektora s **istom** svojstvenom vrijednošću λ vektorski potprostor od X.

Definicija. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se *spektar* operatora A i označava sa $\sigma(A)$.

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Pitanje.

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Pitanje. Kako odrediti svojstvene vektore?

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Pitanje. Kako odrediti svojstvene vektore?

Uočimo da se jednakost $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ može matrično zapisati sa

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Pitanje. Kako odrediti svojstvene vektore?

Uočimo da se jednakost $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ može matrično zapisati sa

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \quad = \quad \lambda\mathbf{x},$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Pitanje. Kako odrediti svojstvene vektore?

Uočimo da se jednakost $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ može matrično zapisati sa

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x}, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Pitanje. Kako odrediti svojstvene vektore?

Uočimo da se jednakost $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ može matrično zapisati sa

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x}, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Pitanje. Kako odrediti svojstvene vektore?

Uočimo da se jednakost $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ može matrično zapisati sa

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x}, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Pitanje. Kako odrediti svojstvene vektore?

Uočimo da se jednakost $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ može matrično zapisati sa

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x}, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dakle, svojstveni vektori su <u>**netrivijalna**</u> rješenja $\mathbf{x}$ homogenog sustava

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Pitanje. Kako odrediti svojstvene vektore?

Uočimo da se jednakost $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ može matrično zapisati sa

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x}, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{x} &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dakle, svojstveni vektori su <u>**netrivijalna**</u> rješenja $\mathbf{x}$ homogenog sustava

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

koja postoje ako i samo ako je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Definicija.

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Definicija. Jednadžba $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ zove se *karakteristična jednadžba* operatora A.

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Definicija. Jednadžba $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ zove se *karakteristična jednadžba* operatora A.

Zaključujemo:

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Definicija. Jednadžba $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ zove se *karakteristična jednadžba* operatora A.

Zaključujemo: svojstvene vrijednosti operatora A su rješenja karakteristične jednadžbe.

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Definicija. Jednadžba $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ zove se *karakteristična jednadžba* operatora A.

Zaključujemo: svojstvene vrijednosti operatora A su rješenja karakteristične jednadžbe.

Izraz $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ je **polinom** u varijabli λ

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Definicija. Jednadžba $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ zove se *karakteristična jednadžba* operatora A.

Zaključujemo: svojstvene vrijednosti operatora A su rješenja karakteristične jednadžbe.

Izraz $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ je **polinom** u varijabli λ kojeg nazivamo *karakteristični polinom* operatora A.

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.*

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

   $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ slične $\quad \Rightarrow$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

$$\mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \text{ slične} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \text{ slične} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} \; = \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \text{ slične} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \text{ slične} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \text{ slične} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \\ &\qquad\qquad = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T} \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \text{ slične} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \\
&\qquad\qquad = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} \text{ i } \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \text{ su slične}
\end{aligned}
$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \text{ slične} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \\
&\qquad\qquad = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} \text{ i } \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \text{ su slične} \\
&\Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})
\end{aligned}
$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \text{ slične} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \\
&\qquad\qquad = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} \text{ i } \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \text{ su slične} \\
&\Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \\
&\Rightarrow \quad \text{isti karakteristični polinom za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}'
\end{aligned}
$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \text{ slične} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \\
&\qquad\qquad = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} \text{ i } \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \text{ su slične} \\
&\Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \\
&\Rightarrow \quad \text{isti karakteristični polinom za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}'
\end{aligned}
$$

2. *Svojstvene vrijednosti operatora ne ovise o odabiru baza.*

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \text{ slične} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \\
&\qquad\qquad = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} \text{ i } \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \text{ su slične} \\
&\Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \\
&\Rightarrow \quad \text{isti karakteristični polinom za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}'
\end{aligned}
$$

2. *Svojstvene vrijednosti operatora ne ovise o odabiru baza.* Naime,

$$\text{isti karakt. pol. za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \quad \Rightarrow$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \text{ slične} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \\
&\qquad\qquad = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} \text{ i } \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \text{ su slične} \\
&\Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \\
&\Rightarrow \quad \text{isti karakteristični polinom za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}'
\end{aligned}
$$

2. *Svojstvene vrijednosti operatora ne ovise o odabiru baza.* Naime,

$$
\text{isti karakt. pol. za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \quad \Rightarrow \quad \text{iste nultočke karakt. pol. za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}'
$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \text{ slične} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \\
&\qquad\qquad = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} \text{ i } \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \text{ su slične} \\
&\Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \\
&\Rightarrow \quad \text{isti karakteristični polinom za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}'
\end{aligned}$$

2. *Svojstvene vrijednosti operatora ne ovise o odabiru baza.* Naime,

$$\begin{aligned}
\text{isti karakt. pol. za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \quad &\Rightarrow \quad \text{iste nultočke karakt. pol. za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \\
&\Rightarrow \quad \text{iste svojstvene vr. za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}'
\end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \text{ slične} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \\
&\qquad\qquad = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} \text{ i } \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \text{ su slične} \\
&\Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \\
&\Rightarrow \quad \text{isti karakteristični polinom za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}'
\end{aligned}$$

2. *Svojstvene vrijednosti operatora ne ovise o odabiru baza.* Naime,

$$\begin{aligned}
\text{isti karakt. pol. za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \quad &\Rightarrow \quad \text{iste nultočke karakt. pol. za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \\
&\Rightarrow \quad \text{iste svojstvene vr. za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}'
\end{aligned}$$

3. *Stupanj karakterističnog polinoma jednak je redu n matrice A.*

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \text{ slične} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \\
&\qquad\qquad = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} \text{ i } \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \text{ su slične} \\
&\Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \\
&\Rightarrow \quad \text{isti karakteristični polinom za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}'
\end{aligned}$$

2. *Svojstvene vrijednosti operatora ne ovise o odabiru baza.* Naime,

$$\begin{aligned}
\text{isti karakt. pol. za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \quad &\Rightarrow \quad \text{iste nultočke karakt. pol. za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \\
&\Rightarrow \quad \text{iste svojstvene vr. za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}'
\end{aligned}$$

3. *Stupanj karakterističnog polinoma jednak je redu n matrice A.*

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ je karakt. polinom $\Rightarrow$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Uočimo sljedeće:

1. *Karakteristični polinom ne ovisi o odabiru baza.* Naime,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \text{ slične} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \\
&\qquad\qquad = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I} \text{ i } \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \text{ su slične} \\
&\Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}' - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \\
&\Rightarrow \quad \text{isti karakteristični polinom za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}'
\end{aligned}$$

2. *Svojstvene vrijednosti operatora ne ovise o odabiru baza.* Naime,

$$\begin{aligned}
\text{isti karakt. pol. za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \quad &\Rightarrow \quad \text{iste nultočke karakt. pol. za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}' \\
&\Rightarrow \quad \text{iste svojstvene vr. za } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{A}'
\end{aligned}$$

3. *Stupanj karakterističnog polinoma jednak je redu n matrice A.*

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ je karakt. polinom $\Rightarrow \lambda^n$ je najveća potencija u razvoju

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak.

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$,

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a)

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Imamo

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right) \quad =$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Imamo

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Imamo

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 =$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Imamo

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Imamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Imamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \sigma(A) = \{-2, 2\}. \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Imamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \sigma(A) = \{-2, 2\}. \end{aligned}$$

b)

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Imamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \sigma(A) = \{-2, 2\}. \end{aligned}$$

b) Imamo

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) =$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Imamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \sigma(A) = \{-2, 2\}. \end{aligned}$$

b) Imamo

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Imamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \sigma(A) = \{-2, 2\}. \end{aligned}$$

b) Imamo

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 =$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Imamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \sigma(A) = \{-2, 2\}. \end{aligned}$$

b) Imamo

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Imamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \sigma(A) = \{-2, 2\}. \end{aligned}$$

b) Imamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. a) Imamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \sigma(A) = \{-2, 2\}. \end{aligned}$$

b) Imamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \Rightarrow \sigma(A) = \{1\}. \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. c)

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. c) Imamo

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right) \quad =$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. c) Imamo

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -9 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. c) Imamo

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -9 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. c) Imamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -9 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Zadatak. Odredi svojstvene vrijednosti za:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ \text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. c) Imamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -9 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow \sigma(A) = \phi. \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Obzirom da vrijedi:

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Obzirom da vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti su nul-točke karakterističnog polinoma,

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Obzirom da vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti su nul-točke karakterističnog polinoma,
2. karakteristični polinom je polinom stupnja n,

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Obzirom da vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti su nul-točke karakterističnog polinoma,
2. karakteristični polinom je polinom stupnja n,

po osnovnom teoremu algebre znamo da karakteristični polinom ima točno n nul-točaka.

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Obzirom da vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti su nul-točke karakterističnog polinoma,
2. karakteristični polinom je polinom stupnja n,

po osnovnom teoremu algebre znamo da karakteristični polinom ima točno n nul-točaka. Međutim, osnovni teorem algebre kaže i da nul-točke polinoma mogu biti:

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Obzirom da vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti su nul-točke karakterističnog polinoma,
2. karakteristični polinom je polinom stupnja n,

po osnovnom teoremu algebre znamo da karakteristični polinom ima točno n nul-točaka. Međutim, osnovni teorem algebre kaže i da nul-točke polinoma mogu biti:

1. realne ili kompleksne,

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Obzirom da vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti su nul-točke karakterističnog polinoma,
2. karakteristični polinom je polinom stupnja n,

po osnovnom teoremu algebre znamo da karakteristični polinom ima točno n nul-točaka. Međutim, osnovni teorem algebre kaže i da nul-točke polinoma mogu biti:

1. realne ili kompleksne,
2. jednostruke ili višestruke.

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Obzirom da vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti su nul-točke karakterističnog polinoma,
2. karakteristični polinom je polinom stupnja n,

po osnovnom teoremu algebre znamo da karakteristični polinom ima točno n nul-točaka. Međutim, osnovni teorem algebre kaže i da nul-točke polinoma mogu biti:

1. realne ili kompleksne,
2. jednostruke ili višestruke.

Zaključak:

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Obzirom da vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti su nul-točke karakterističnog polinoma,
2. karakteristični polinom je polinom stupnja n,

po osnovnom teoremu algebre znamo da karakteristični polinom ima točno n nul-točaka. Međutim, osnovni teorem algebre kaže i da nul-točke polinoma mogu biti:

1. realne ili kompleksne,
2. jednostruke ili višestruke.

Zaključak: nije svih n nul-točaka karakterističnog polinoma uvijek prihvatljivo kao svojstvena vrijednost,

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Obzirom da vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti su nul-točke karakterističnog polinoma,
2. karakteristični polinom je polinom stupnja n,

po osnovnom teoremu algebre znamo da karakteristični polinom ima točno n nul-točaka. Međutim, osnovni teorem algebre kaže i da nul-točke polinoma mogu biti:

1. realne ili kompleksne,
2. jednostruke ili višestruke.

Zaključak: nije svih n nul-točaka karakterističnog polinoma uvijek prihvatljivo kao svojstvena vrijednost, što znači da operator može imati najviše n **realnih i različitih** svojstvenih vrijednosti,

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Obzirom da vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti su nul-točke karakterističnog polinoma,
2. karakteristični polinom je polinom stupnja n,

po osnovnom teoremu algebre znamo da karakteristični polinom ima točno n nul-točaka. Međutim, osnovni teorem algebre kaže i da nul-točke polinoma mogu biti:

1. realne ili kompleksne,
2. jednostruke ili višestruke.

Zaključak: nije svih n nul-točaka karakterističnog polinoma uvijek prihvatljivo kao svojstvena vrijednost, što znači da operator može imati najviše n **realnih i različitih** svojstvenih vrijednosti, ali ih može imati i manje od n.

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Također, uočimo sljedeće:

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Također, uočimo sljedeće:

$$\lambda = 0 \text{ je svojstvena vrijednost} \quad \Leftrightarrow$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Također, uočimo sljedeće:

$$\lambda = 0 \text{ je svojstvena vrijednost} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I}) = \det(\mathbf{A}) = 0$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Također, uočimo sljedeće:

$$\begin{aligned} \lambda = 0 \text{ je svojstvena vrijednost} \quad &\Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I}) = \det(\mathbf{A}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ je singularan} \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Također, uočimo sljedeće:

$$\begin{aligned} \lambda = 0 \text{ je svojstvena vrijednost} \quad &\Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I}) = \det(\mathbf{A}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ je singularan} \end{aligned}$$

Propozicija.

Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom

Također, uočimo sljedeće:

$$\begin{aligned} \lambda = 0 \text{ je svojstvena vrijednost} \quad &\Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I}) = \det(\mathbf{A}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ je singularan} \end{aligned}$$

Propozicija. Operator A je singularan ako i samo ako je 0 njegova svojstvena vrijednost.

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore određujemo tako da:

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore određujemo tako da:

1. rješavamo karakterističnu jednadžbu $\det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right) = 0$

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore određujemo tako da:

1. rješavamo karakterističnu jednadžbu $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ čija rješenja su svojstvene vrijednosti λ_i operatora A,

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore određujemo tako da:

1. rješavamo karakterističnu jednadžbu $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ čija rješenja su svojstvene vrijednosti λ_i operatora A,
2. za svaku svojstvenu vrijednost λ_i tražimo rješenje $\mathbf{x}$ sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore određujemo tako da:

1. rješavamo karakterističnu jednadžbu $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ čija rješenja su svojstvene vrijednosti λ_i operatora A,
2. za svaku svojstvenu vrijednost λ_i tražimo rješenje $\mathbf{x}$ sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ koje je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ_i.

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore određujemo tako da:

1. rješavamo karakterističnu jednadžbu $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ čija rješenja su svojstvene vrijednosti λ_i operatora A,
2. za svaku svojstvenu vrijednost λ_i tražimo rješenje $\mathbf{x}$ sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ koje je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ_i.

Kod rješavanja sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ u drugom koraku, pitamo se:

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore određujemo tako da:

1. rješavamo karakterističnu jednadžbu $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ čija rješenja su svojstvene vrijednosti λ_i operatora A,
2. za svaku svojstvenu vrijednost λ_i tražimo rješenje $\mathbf{x}$ sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ koje je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ_i.

Kod rješavanja sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ u drugom koraku, pitamo se:

- ima li sustav rješenje?

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore određujemo tako da:

1. rješavamo karakterističnu jednadžbu $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ čija rješenja su svojstvene vrijednosti λ_i operatora A,
2. za svaku svojstvenu vrijednost λ_i tražimo rješenje $\mathbf{x}$ sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ koje je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ_i.

Kod rješavanja sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ u drugom koraku, pitamo se:

- ima li sustav rješenje? Ima, jer je

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore određujemo tako da:

1. rješavamo karakterističnu jednadžbu $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ čija rješenja su svojstvene vrijednosti λ_i operatora A,
2. za svaku svojstvenu vrijednost λ_i tražimo rješenje $\mathbf{x}$ sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ koje je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ_i.

Kod rješavanja sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ u drugom koraku, pitamo se:

- ima li sustav rješenje? Ima, jer je homogen.

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore određujemo tako da:

1. rješavamo karakterističnu jednadžbu $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ čija rješenja su svojstvene vrijednosti λ_i operatora A,
2. za svaku svojstvenu vrijednost λ_i tražimo rješenje $\mathbf{x}$ sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ koje je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ_i.

Kod rješavanja sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ u drugom koraku, pitamo se:

- ima li sustav rješenje? Ima, jer je homogen.
- kakvo je to rješenje?

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore određujemo tako da:

1. rješavamo karakterističnu jednadžbu $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ čija rješenja su svojstvene vrijednosti λ_i operatora A,
2. za svaku svojstvenu vrijednost λ_i tražimo rješenje $\mathbf{x}$ sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ koje je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ_i.

Kod rješavanja sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ u drugom koraku, pitamo se:

- ima li sustav rješenje? Ima, jer je homogen.
- kakvo je to rješenje? Parametarsko, jer je

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore određujemo tako da:

1. rješavamo karakterističnu jednadžbu $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ čija rješenja su svojstvene vrijednosti λ_i operatora A,
2. za svaku svojstvenu vrijednost λ_i tražimo rješenje $\mathbf{x}$ sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ koje je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ_i.

Kod rješavanja sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ u drugom koraku, pitamo se:

- ima li sustav rješenje? Ima, jer je homogen.
- kakvo je to rješenje? Parametarsko, jer je matrica sustava singularna tj. $\det(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = 0$.

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore određujemo tako da:

1. rješavamo karakterističnu jednadžbu $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ čija rješenja su svojstvene vrijednosti λ_i operatora A,
2. za svaku svojstvenu vrijednost λ_i tražimo rješenje $\mathbf{x}$ sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ koje je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ_i.

Kod rješavanja sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ u drugom koraku, pitamo se:

- ima li sustav rješenje? Ima, jer je homogen.
- kakvo je to rješenje? Parametarsko, jer je matrica sustava singularna tj. $\det(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = 0$.

Jedino pitanje je koliko parametara ima rješenje

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore određujemo tako da:

1. rješavamo karakterističnu jednadžbu $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ čija rješenja su svojstvene vrijednosti λ_i operatora A,
2. za svaku svojstvenu vrijednost λ_i tražimo rješenje $\mathbf{x}$ sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ koje je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ_i.

Kod rješavanja sustava $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ u drugom koraku, pitamo se:

- ima li sustav rješenje? Ima, jer je homogen.
- kakvo je to rješenje? Parametarsko, jer je matrica sustava singularna tj. $\det(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = 0$.

Jedino pitanje je koliko parametara ima rješenje (broj parametara= broj lin.nez. svojstvenih vektora za taj λ).

Dijagonalizacija operatora

Dijagonalizacija operatora

Teorem.

Dijagonalizacija operatora

Teorem. Linearni operator se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora.

Dijagonalizacija operatora

Teorem. Linearni operator se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora. Matrični prikaz linearnog operatora u bazi svojstvenih vektora je dijagonalna matrica

Dijagonalizacija operatora

Teorem. Linearni operator se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora. Matrični prikaz linearnog operatora u bazi svojstvenih vektora je dijagonalna matrica kojoj su na dijagonali svojstvene vrijednosti operatora.

Dijagonalizacija operatora

Teorem. Linearni operator se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora. Matrični prikaz linearnog operatora u bazi svojstvenih vektora je dijagonalna matrica kojoj su na dijagonali svojstvene vrijednosti operatora.

Pitanje.

Dijagonalizacija operatora

Teorem. Linearni operator se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora. Matrični prikaz linearnog operatora u bazi svojstvenih vektora je dijagonalna matrica kojoj su na dijagonali svojstvene vrijednosti operatora.

Pitanje. Kad postoji baza svojstvenih vektora.

Dijagonalizacija operatora

Teorem. Linearni operator se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora. Matrični prikaz linearnog operatora u bazi svojstvenih vektora je dijagonalna matrica kojoj su na dijagonali svojstvene vrijednosti operatora.

Pitanje. Kad postoji baza svojstvenih vektora.

Teorem.

Dijagonalizacija operatora

Teorem. Linearni operator se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora. Matrični prikaz linearnog operatora u bazi svojstvenih vektora je dijagonalna matrica kojoj su na dijagonali svojstvene vrijednosti operatora.

Pitanje. Kad postoji baza svojstvenih vektora.

Teorem. Svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su međusobno linearno nezavisni.

Dijagonalizacija operatora

Teorem. Linearni operator se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora. Matrični prikaz linearnog operatora u bazi svojstvenih vektora je dijagonalna matrica kojoj su na dijagonali svojstvene vrijednosti operatora.

Pitanje. Kad postoji baza svojstvenih vektora.

Teorem. Svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su međusobno linearno nezavisni.

Odgovor.

Dijagonalizacija operatora

Teorem. Linearni operator se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora. Matrični prikaz linearnog operatora u bazi svojstvenih vektora je dijagonalna matrica kojoj su na dijagonali svojstvene vrijednosti operatora.

Pitanje. Kad postoji baza svojstvenih vektora.

Teorem. Svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su međusobno linearno nezavisni.

Odgovor. Ako je svih n svojstvenih vrijednosti linearnog operatora **realno i različito**,

Dijagonalizacija operatora

Teorem. Linearni operator se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora. Matrični prikaz linearnog operatora u bazi svojstvenih vektora je dijagonalna matrica kojoj su na dijagonali svojstvene vrijednosti operatora.

Pitanje. Kad postoji baza svojstvenih vektora.

Teorem. Svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su međusobno linearno nezavisni.

Odgovor. Ako je svih n svojstvenih vrijednosti linearnog operatora **realno i različito**, onda im odgovara n linearno nezavisnih svojstvenih vektora,

Dijagonalizacija operatora

Teorem. Linearni operator se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora. Matrični prikaz linearnog operatora u bazi svojstvenih vektora je dijagonalna matrica kojoj su na dijagonali svojstvene vrijednosti operatora.

Pitanje. Kad postoji baza svojstvenih vektora.

Teorem. Svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su međusobno linearno nezavisni.

Odgovor. Ako je svih n svojstvenih vrijednosti linearnog operatora **realno i različito**, onda im odgovara n linearno nezavisnih svojstvenih vektora, pa imamo bazu, što znači da se operator može dijagonalizirati.

Dijagonalizacija operatora

Teorem. Linearni operator se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora. Matrični prikaz linearnog operatora u bazi svojstvenih vektora je dijagonalna matrica kojoj su na dijagonali svojstvene vrijednosti operatora.

Pitanje. Kad postoji baza svojstvenih vektora.

Teorem. Svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su međusobno linearno nezavisni.

Odgovor. Ako je svih n svojstvenih vrijednosti linearnog operatora **realno i različito**, onda im odgovara n linearno nezavisnih svojstvenih vektora, pa imamo bazu, što znači da se operator može dijagonalizirati.

No, što kad su neke svojstvene vrijednosti 1) kompleksne ili 2) višestruke?

Dijagonalizacija operatora

Teorem. Linearni operator se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora. Matrični prikaz linearnog operatora u bazi svojstvenih vektora je dijagonalna matrica kojoj su na dijagonali svojstvene vrijednosti operatora.

Pitanje. Kad postoji baza svojstvenih vektora.

Teorem. Svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su međusobno linearno nezavisni.

Odgovor. Ako je svih n svojstvenih vrijednosti linearnog operatora **realno i različito**, onda im odgovara n linearno nezavisnih svojstvenih vektora, pa imamo bazu, što znači da se operator može dijagonalizirati.

No, što kad su neke svojstvene vrijednosti 1) kompleksne ili 2) višestruke? Tada odgovor pronalazimo postupkom dijagonalizacije operatora.

Dijagonalizacija operatora

Postupak dijagonaliziranja operatora provodi se sljedećim koracima.

Dijagonalizacija operatora

Postupak dijagonaliziranja operatora provodi se sljedećim koracima.

1. Pronađemo rješenja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ karakteristične jednadžbe $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0}$

Dijagonalizacija operatora

Postupak dijagonaliziranja operatora provodi se sljedećim koracima.

1. Pronađemo rješenja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ karakteristične jednadžbe $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ i ta rješenja su svojstvene vrijednosti operatora A.

Dijagonalizacija operatora

Postupak dijagonaliziranja operatora provodi se sljedećim koracima.

1. Pronađemo rješenja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ karakteristične jednadžbe $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ i ta rješenja su svojstvene vrijednosti operatora A.
2. Za svaku svojstvenu vrijednost λ_i rješavamo homogeni sustav $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Dijagonalizacija operatora

Postupak dijagonaliziranja operatora provodi se sljedećim koracima.

1. Pronađemo rješenja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ karakteristične jednadžbe $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ i ta rješenja su svojstvene vrijednosti operatora A.
2. Za svaku svojstvenu vrijednost λ_i rješavamo homogeni sustav $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ čija rješenja su svojstveni vektori operatora A.

Dijagonalizacija operatora

Postupak dijagonaliziranja operatora provodi se sljedećim koracima.

1. Pronađemo rješenja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ karakteristične jednadžbe $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ i ta rješenja su svojstvene vrijednosti operatora A.
2. Za svaku svojstvenu vrijednost λ_i rješavamo homogeni sustav $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ čija rješenja su svojstveni vektori operatora A.
3. Ako operator A **<u>ima</u>** n linearno nezavisnih svojstvenih vektora,

Dijagonalizacija operatora

Postupak dijagonaliziranja operatora provodi se sljedećim koracima.

1. Pronađemo rješenja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ karakteristične jednadžbe $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ i ta rješenja su svojstvene vrijednosti operatora A.
2. Za svaku svojstvenu vrijednost λ_i rješavamo homogeni sustav $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ čija rješenja su svojstveni vektori operatora A.
3. Ako operator A **<u>ima</u>** n linearno nezavisnih svojstvenih vektora, onda se operator A **<u>može</u>** dijagonalizirati kao

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dijagonalizacija operatora

Postupak dijagonaliziranja operatora provodi se sljedećim koracima.

1. Pronađemo rješenja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ karakteristične jednadžbe $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ i ta rješenja su svojstvene vrijednosti operatora A.
2. Za svaku svojstvenu vrijednost λ_i rješavamo homogeni sustav $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ čija rješenja su svojstveni vektori operatora A.
3. Ako operator A **<u>ima</u>** n linearno nezavisnih svojstvenih vektora, onda se operator A **<u>može</u>** dijagonalizirati kao

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

pri čemu se $\mathbf{T}$ dobije zapisivanjem svojstvenih vektora u stupce.

Dijagonalizacija operatora

Postupak dijagonaliziranja operatora provodi se sljedećim koracima.

1. Pronađemo rješenja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ karakteristične jednadžbe $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ i ta rješenja su svojstvene vrijednosti operatora A.
2. Za svaku svojstvenu vrijednost λ_i rješavamo homogeni sustav $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ čija rješenja su svojstveni vektori operatora A.
3. Ako operator A **<u>ima</u>** n linearno nezavisnih svojstvenih vektora, onda se operator A **<u>može</u>** dijagonalizirati kao

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

pri čemu se $\mathbf{T}$ dobije zapisivanjem svojstvenih vektora u stupce.
Ako, pak, operator A **<u>nema</u>** n linearno nezavisnih svojstvenih vektora,

Dijagonalizacija operatora

Postupak dijagonaliziranja operatora provodi se sljedećim koracima.

1. Pronađemo rješenja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ karakteristične jednadžbe $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ i ta rješenja su svojstvene vrijednosti operatora A.
2. Za svaku svojstvenu vrijednost λ_i rješavamo homogeni sustav $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ čija rješenja su svojstveni vektori operatora A.
3. Ako operator A **<u>ima</u>** n linearno nezavisnih svojstvenih vektora, onda se operator A **<u>može</u>** dijagonalizirati kao

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

pri čemu se $\mathbf{T}$ dobije zapisivanjem svojstvenih vektora u stupce.
Ako, pak, operator A **<u>nema</u>** n linearno nezavisnih svojstvenih vektora, onda zaključujemo da se operator A **<u>ne može</u>** dijagonalizirati.

Skalarni produkt

Skalarni produkt

Skalarni produkt u V^3.

Skalarni produkt

Skalarni produkt u V^3. Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$

Skalarni produkt

Skalarni produkt u V^3. Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ i $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.

Skalarni produkt

Skalarni produkt u V^3. Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ i $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Tada je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi.$$

Skalarni produkt

Skalarni produkt u V^3. Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ i $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Tada je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi.$$

Uočimo:

Skalarni produkt

Skalarni produkt u V^3. Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ i $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Tada je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi.$$

Uočimo: ova formula nije zgodna za poopćavanje na višedmenzionalne vektorske prostore!

Skalarni produkt

Skalarni produkt u V^3. Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ i $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Tada je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi.$$

Uočimo: ova formula nije zgodna za poopćavanje na višedmenzionalne vektorske prostore!

Međutim, u bazi $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ vrijedi

Skalarni produkt

Skalarni produkt u V^3. Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ i $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Tada je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi.$$

Uočimo: ova formula nije zgodna za poopćavanje na višedmenzionalne vektorske prostore!

Međutim, u bazi $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} &= a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{b} &= b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k} \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

Skalarni produkt

Skalarni produkt u V^3. Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ i $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Tada je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi.$$

Uočimo: ova formula nije zgodna za poopćavanje na višedmenzionalne vektorske prostore!

Međutim, u bazi $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} &= a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{b} &= b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k} \end{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Skalarni produkt

Skalarni produkt u V^3. Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ i $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Tada je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi.$$

Uočimo: ova formula nije zgodna za poopćavanje na višedmenzionalne vektorske prostore!

Međutim, u bazi $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} &= a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{b} &= b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k} \end{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Uočimo:

Skalarni produkt

Skalarni produkt u V^3. Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ i $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Tada je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi.$$

Uočimo: ova formula nije zgodna za poopćavanje na višedmenzionalne vektorske prostore!

Međutim, u bazi $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} &= a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{b} &= b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k} \end{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Uočimo: ova formula je puno zgodnija za poopćavanje!

Skalarni produkt

Skalarni produkt u V^3. Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ i $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Tada je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi.$$

Uočimo: ova formula nije zgodna za poopćavanje na višedmenzionalne vektorske prostore!

Međutim, u bazi $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} &= a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{b} &= b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k} \end{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Uočimo: ova formula je puno zgodnija za poopćavanje! Podsjetimo se još:

Skalarni produkt

Skalarni produkt u V^3. Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ i $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Tada je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi.$$

Uočimo: ova formula nije zgodna za poopćavanje na višedmenzionalne vektorske prostore!

Međutim, u bazi $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} &= a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{b} &= b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k} \end{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Uočimo: ova formula je puno zgodnija za poopćavanje! Podsjetimo se još:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

Skalarni produkt

Skalarni produkt u V^3. Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ i $\varphi = \measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Tada je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi.$$

Uočimo: ova formula nije zgodna za poopćavanje na višedmenzionalne vektorske prostore!

Međutim, u bazi $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} &= a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{b} &= b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k} \end{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Uočimo: ova formula je puno zgodnija za poopćavanje! Podsjetimo se još:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \text{ i } \cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right|}.$$

Skalarni produkt

Skalarni produkt u vektorskom prostoru X dimenzije n.

Skalarni produkt

Skalarni produkt u vektorskom prostoru X dimenzije n. Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dva vektora iz s matričnim prikazom

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Skalarni produkt

Skalarni produkt u vektorskom prostoru X dimenzije n. Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dva vektora iz s matričnim prikazom

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Skalarni produkt

Skalarni produkt u vektorskom prostoru X **dimenzije** n. Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dva vektora iz s matričnim prikazom

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Skalarni produkt vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$

Skalarni produkt

Skalarni produkt u vektorskom prostoru X dimenzije n. Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dva vektora iz s matričnim prikazom

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Skalarni produkt vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ definiran je sa

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n =$$

Skalarni produkt

Skalarni produkt u vektorskom prostoru X dimenzije n. Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dva vektora iz s matričnim prikazom

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Skalarni produkt vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ definiran je sa

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}.$$

Skalarni produkt

Skalarni produkt u vektorskom prostoru X dimenzije n. Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dva vektora iz s matričnim prikazom

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Skalarni produkt vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ definiran je sa

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}.$$

Duljina (kažemo još i *norma*) vektora $\mathbf{x}$

Skalarni produkt

Skalarni produkt u vektorskom prostoru X dimenzije n. Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dva vektora iz s matričnim prikazom

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Skalarni produkt vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ definiran je sa

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}.$$

Duljina (kažemo još i *norma*) vektora $\mathbf{x}$ definirana je sa

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{y})} =$$

Skalarni produkt

Skalarni produkt u vektorskom prostoru X dimenzije n. Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dva vektora iz s matričnim prikazom

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Skalarni produkt vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ definiran je sa

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}.$$

Duljina (kažemo još i *norma*) vektora $\mathbf{x}$ definirana je sa

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{y})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Skalarni produkt

Skalarni produkt u vektorskom prostoru X dimenzije n. Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dva vektora iz s matričnim prikazom

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Skalarni produkt vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ definiran je sa

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}.$$

Duljina (kažemo još i *norma*) vektora $\mathbf{x}$ definirana je sa

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{y})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Kut φ između vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ d

Skalarni produkt

Skalarni produkt u vektorskom prostoru X dimenzije n. Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dva vektora iz s matričnim prikazom

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Skalarni produkt vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ definiran je sa

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}.$$

Duljina (kažemo još i *norma*) vektora $\mathbf{x}$ definirana je sa

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{y})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Kut φ između vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ definiran je sa

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}.$$

Skalarni produkt

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (kažemo još i *ortogonalni*)

Skalarni produkt

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (kažemo još i *ortogonalni*) ako je $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$.

Skalarni produkt

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (kažemo još i *ortogonalni*) ako je $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$. Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ *normiran* ako je $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Skalarni produkt

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (kažemo još i *ortogonalni*) ako je $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$. Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ *normiran* ako je $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Četiri najvažnija svojstva skalarnog produkta su sljedeća.

Skalarni produkt

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (kažemo još i *ortogonalni*) ako je $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$. Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ *normiran* ako je $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Četiri najvažnija svojstva skalarnog produkta su sljedeća.

1. *Pozitivnost.*

Skalarni produkt

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (kažemo još i *ortogonalni*) ako je $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$. Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ *normiran* ako je $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Četiri najvažnija svojstva skalarnog produkta su sljedeća.

1. *Pozitivnost.* Za svaki $\mathbf{x} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0$,

Skalarni produkt

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (kažemo još i *ortogonalni*) ako je $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$. Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ *normiran* ako je $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Četiri najvažnija svojstva skalarnog produkta su sljedeća.

1. *Pozitivnost.* Za svaki $\mathbf{x} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0$, pri čemu je $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Skalarni produkt

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (kažemo još i *ortogonalni*) ako je $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$. Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ *normiran* ako je $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Četiri najvažnija svojstva skalarnog produkta su sljedeća.

1. *Pozitivnost.* Za svaki $\mathbf{x} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0$, pri čemu je $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. *Homogenost.*

Skalarni produkt

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (kažemo još i *ortogonalni*) ako je $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$. Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ *normiran* ako je $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Četiri najvažnija svojstva skalarnog produkta su sljedeća.

1. *Pozitivnost.* Za svaki $\mathbf{x} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0$, pri čemu je $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. *Homogenost.* Za svake $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ i za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi

Skalarni produkt

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (kažemo još i *ortogonalni*) ako je $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$. Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ *normiran* ako je $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Četiri najvažnija svojstva skalarnog produkta su sljedeća.

1. *Pozitivnost.* Za svaki $\mathbf{x} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0$, pri čemu je $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. *Homogenost.* Za svake $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ i za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(\alpha\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y}) = \alpha\,(\mathbf{x}|\mathbf{y})$$

Skalarni produkt

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (kažemo još i *ortogonalni*) ako je $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$. Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ *normiran* ako je $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Četiri najvažnija svojstva skalarnog produkta su sljedeća.

1. *Pozitivnost.* Za svaki $\mathbf{x} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0$, pri čemu je $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. *Homogenost.* Za svake $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ i za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$(\alpha\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y}) = \alpha\,(\mathbf{x}|\mathbf{y})$$
3. *Komutativnost.*

Skalarni produkt

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (kažemo još i *ortogonalni*) ako je $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$. Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ *normiran* ako je $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Četiri najvažnija svojstva skalarnog produkta su sljedeća.

1. *Pozitivnost.* Za svaki $\mathbf{x} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0$, pri čemu je $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. *Homogenost.* Za svake $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ i za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$(\alpha\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y}) = \alpha\,(\mathbf{x}|\mathbf{y})$$
3. *Komutativnost.* Za svake $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$.

Skalarni produkt

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (kažemo još i *ortogonalni*) ako je $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$. Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ *normiran* ako je $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Četiri najvažnija svojstva skalarnog produkta su sljedeća.

1. *Pozitivnost.* Za svaki $\mathbf{x} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0$, pri čemu je $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. *Homogenost.* Za svake $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ i za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$(\alpha\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y}) = \alpha\,(\mathbf{x}|\mathbf{y})$$
3. *Komutativnost.* Za svake $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$.
4. *Aditivnost.*

Skalarni produkt

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (kažemo još i *ortogonalni*) ako je $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$. Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ *normiran* ako je $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Četiri najvažnija svojstva skalarnog produkta su sljedeća.

1. *Pozitivnost.* Za svaki $\mathbf{x} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0$, pri čemu je $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. *Homogenost.* Za svake $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ i za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$(\alpha\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y}) = \alpha\,(\mathbf{x}|\mathbf{y})$$
3. *Komutativnost.* Za svake $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$.
4. *Aditivnost.* Za svake $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ vrijedi
$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}|\mathbf{z}) = (\mathbf{x}|\mathbf{z}) + (\mathbf{y}|\mathbf{z})\,.$$

Skalarni produkt

Nadalje, kažemo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ *okomiti* (kažemo još i *ortogonalni*) ako je $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$. Kažemo da je vektor $\mathbf{x}$ *normiran* ako je $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Četiri najvažnija svojstva skalarnog produkta su sljedeća.

1. *Pozitivnost.* Za svaki $\mathbf{x} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0$, pri čemu je $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. *Homogenost.* Za svake $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ i za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$(\alpha\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\alpha\mathbf{y}) = \alpha\,(\mathbf{x}|\mathbf{y})$$
3. *Komutativnost.* Za svake $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ vrijedi $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$.
4. *Aditivnost.* Za svake $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ vrijedi
$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}|\mathbf{z}) = (\mathbf{x}|\mathbf{z}) + (\mathbf{y}|\mathbf{z})\,.$$

Svojstva aditivnosti i homogenosti skalarnog produkta zovu se jednim imenom svojstvo *linearnosti* skalarnog produkta.

Skalarni produkt

Definicija.

Skalarni produkt

Definicija. Kažemo da su vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *ortonormirani*,

Skalarni produkt

Definicija. Kažemo da su vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *ortonormirani*, ako su svaka dva vektora međusobno ortogonalni

Skalarni produkt

Definicija. Kažemo da su vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *ortonormirani*, ako su svaka dva vektora međusobno ortogonalni i ako je svaki od tih vektora normiran.

Skalarni produkt

Definicija. Kažemo da su vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *ortonormirani*, ako su svaka dva vektora međusobno ortogonalni i ako je svaki od tih vektora normiran.

Definicija.

Skalarni produkt

Definicija. Kažemo da su vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *ortonormirani*, ako su svaka dva vektora međusobno ortogonalni i ako je svaki od tih vektora normiran.

Definicija. *Ortonormirana baza* vektorskog prostora je svaka baza koju sačinjavaju ortonormirani vektori.

Simetrične matrice

Definicija.

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ simetrična

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ simetrična ako vrijedi $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ simetrična ako vrijedi $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Zadatak.

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ simetrična ako vrijedi $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Zadatak. Ispitaj koja od sljedećih matrica je simetrična

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ simetrična ako vrijedi $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Zadatak. Ispitaj koja od sljedećih matrica je simetrična

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ simetrična ako vrijedi $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Zadatak. Ispitaj koja od sljedećih matrica je simetrična

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ simetrična ako vrijedi $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Zadatak. Ispitaj koja od sljedećih matrica je simetrična

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A}^T =$$

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ simetrična ako vrijedi $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Zadatak. Ispitaj koja od sljedećih matrica je simetrična

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ simetrična ako vrijedi $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Zadatak. Ispitaj koja od sljedećih matrica je simetrična

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}^T =$$

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ simetrična ako vrijedi $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Zadatak. Ispitaj koja od sljedećih matrica je simetrična

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ simetrična ako vrijedi $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Zadatak. Ispitaj koja od sljedećih matrica je simetrična

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ simetrična ako vrijedi $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Zadatak. Ispitaj koja od sljedećih matrica je simetrična

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pa matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ nisu simetrične, dok matrica $\mathbf{C}$ jest simetrična.

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je matrica $\mathbf{A}$ simetrična ako vrijedi $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Zadatak. Ispitaj koja od sljedećih matrica je simetrična

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pa matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ nisu simetrične, dok matrica $\mathbf{C}$ jest simetrična. QED

Simetrične matrice

Podsjetimo se, kod općenitih kvadratnih matrica vrijedi:

Simetrične matrice

Podsjetimo se, kod općenitih kvadratnih matrica vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:

Simetrične matrice

Podsjetimo se, kod općenitih kvadratnih matrica vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
    1. realne ili kompleksne,

Simetrične matrice

Podsjetimo se, kod općenitih kvadratnih matrica vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
    1. realne ili kompleksne,
    2. jednostruke ili višestruke;

Simetrične matrice

Podsjetimo se, kod općenitih kvadratnih matrica vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. realne ili kompleksne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,

Simetrične matrice

Podsjetimo se, kod općenitih kvadratnih matrica vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. realne ili kompleksne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,
3. baza svojstvenih vektora možda postoji.

Simetrične matrice

Podsjetimo se, kod općenitih kvadratnih matrica vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. realne ili kompleksne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,
3. baza svojstvenih vektora možda postoji.

Kod simetričnih kvadratnih matrica, neka od ovih svojstava se "proljepšavaju".

Simetrične matrice

Podsjetimo se, kod općenitih kvadratnih matrica vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. realne ili kompleksne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,
3. baza svojstvenih vektora možda postoji.

Kod simetričnih kvadratnih matrica, neka od ovih svojstava se "proljepšavaju".

Teorem.

Simetrične matrice

Podsjetimo se, kod općenitih kvadratnih matrica vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. realne ili kompleksne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,
3. baza svojstvenih vektora možda postoji.

Kod simetričnih kvadratnih matrica, neka od ovih svojstava se "proljepšavaju".

Teorem. Ako je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, onda su sve njene svojstvene vrijednosti realne.

Simetrične matrice

Podsjetimo se, kod općenitih kvadratnih matrica vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. realne ili kompleksne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,
3. baza svojstvenih vektora možda postoji.

Kod simetričnih kvadratnih matrica, neka od ovih svojstava se "proljepšavaju".

Teorem. Ako je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, onda su sve njene svojstvene vrijednosti realne.

Teorem.

Simetrične matrice

Podsjetimo se, kod općenitih kvadratnih matrica vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. realne ili kompleksne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,
3. baza svojstvenih vektora možda postoji.

Kod simetričnih kvadratnih matrica, neka od ovih svojstava se "proljepšavaju".

Teorem. Ako je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, onda su sve njene svojstvene vrijednosti realne.
Teorem. Ako je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, onda su svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima međusobno okomiti.

Simetrične matrice

Definicija.

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ *ortonormirana*,

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ *ortonormirana*, ako su njeni stupci ortonormirani vektori.

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ *ortonormirana*, ako su njeni stupci ortonormirani vektori.

Teorem.

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ *ortonormirana*, ako su njeni stupci ortonormirani vektori.

Teorem. Ako je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ ortonormirana, onda je $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ *ortonormirana*, ako su njeni stupci ortonormirani vektori.

Teorem. Ako je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ ortonormirana, onda je $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.

Teorem (Spektralni teorem).

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ *ortonormirana*, ako su njeni stupci ortonormirani vektori.
Teorem. Ako je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ ortonormirana, onda je $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.

Teorem (Spektralni teorem). Svaka simetrična matrica $\mathbf{A}$ ima točno n realnih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ *ortonormirana*, ako su njeni stupci ortonormirani vektori.
Teorem. Ako je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ ortonormirana, onda je $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.

Teorem (Spektralni teorem). Svaka simetrična matrica $\mathbf{A}$ ima točno n realnih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (brojeći višestrukosti, tj. neke mogu biti jednake)

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ *ortonormirana*, ako su njeni stupci ortonormirani vektori.
Teorem. Ako je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ ortonormirana, onda je $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.

Teorem (Spektralni teorem). Svaka simetrična matrica $\mathbf{A}$ ima točno n realnih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (brojeći višestrukosti, tj. neke mogu biti jednake) kojima odgovara točno n linearno nezavisnih svojstvenih vektora

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ *ortonormirana*, ako su njeni stupci ortonormirani vektori.
Teorem. Ako je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ ortonormirana, onda je $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.

Teorem (Spektralni teorem). Svaka simetrična matrica $\mathbf{A}$ ima točno n realnih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (brojeći višestrukosti, tj. neke mogu biti jednake) kojima odgovara točno n linearno nezavisnih svojstvenih vektora (koji tvore bazu),

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ *ortonormirana*, ako su njeni stupci ortonormirani vektori.
Teorem. Ako je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ ortonormirana, onda je $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.

Teorem (Spektralni teorem). Svaka simetrična matrica $\mathbf{A}$ ima točno n realnih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (brojeći višestrukosti, tj. neke mogu biti jednake) kojima odgovara točno n linearno nezavisnih svojstvenih vektora (koji tvore bazu), pa se $\mathbf{A}$ može dijagonalizirati,

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ *ortonormirana*, ako su njeni stupci ortonormirani vektori.
Teorem. Ako je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ ortonormirana, onda je $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.

Teorem (Spektralni teorem). Svaka simetrična matrica $\mathbf{A}$ ima točno n realnih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (brojeći višestrukosti, tj. neke mogu biti jednake) kojima odgovara točno n linearno nezavisnih svojstvenih vektora (koji tvore bazu), pa se $\mathbf{A}$ može dijagonalizirati, tj. slična je dijagonalnoj matrici

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ *ortonormirana*, ako su njeni stupci ortonormirani vektori.
Teorem. Ako je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ ortonormirana, onda je $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.

Teorem (Spektralni teorem). Svaka simetrična matrica $\mathbf{A}$ ima točno n realnih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (brojeći višestrukosti, tj. neke mogu biti jednake) kojima odgovara točno n linearno nezavisnih svojstvenih vektora (koji tvore bazu), pa se $\mathbf{A}$ može dijagonalizirati, tj. slična je dijagonalnoj matrici

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Štoviše, barem jedna baza svojstvenih vektora je ortonormirana,

Simetrične matrice

Definicija. Kažemo da je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ *ortonormirana*, ako su njeni stupci ortonormirani vektori.
Teorem. Ako je kvadratna matrica $\mathbf{S}$ ortonormirana, onda je $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.

Teorem (Spektralni teorem). Svaka simetrična matrica $\mathbf{A}$ ima točno n realnih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (brojeći višestrukosti, tj. neke mogu biti jednake) kojima odgovara točno n linearno nezavisnih svojstvenih vektora (koji tvore bazu), pa se $\mathbf{A}$ može dijagonalizirati, tj. slična je dijagonalnoj matrici

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Štoviše, barem jedna baza svojstvenih vektora je ortonormirana, što znači da postoji ortonormirana matrica prijelaza $\mathbf{S}$ takva da je $\mathbf{A}' = \mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S}$.

Simetrične matrice

Za **<u>općenite</u>** kvadratne matrice vrijedi:

Simetrične matrice

Za **<u>općenite</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:

Simetrične matrice

Za **<u>općenite</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
    1. realne ili kompleksne,

Simetrične matrice

Za **<u>općenite</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
    1. realne ili kompleksne,
    2. jednostruke ili višestruke;

Simetrične matrice

Za **<u>općenite</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. realne ili kompleksne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,

Simetrične matrice

Za **<u>općenite</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. realne ili kompleksne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,
3. baza svojstvenih vektora možda postoji.

Simetrične matrice

Za **<u>općenite</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. realne ili kompleksne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,
3. baza svojstvenih vektora možda postoji.

Za **<u>simetrične</u>** kvadratne matrice vrijedi:

Simetrične matrice

Za **<u>općenite</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. realne ili kompleksne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,
3. baza svojstvenih vektora možda postoji.

Za **<u>simetrične</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:

Simetrične matrice

Za **<u>općenite</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. realne ili kompleksne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,
3. baza svojstvenih vektora možda postoji.

Za **<u>simetrične</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. **samo** realne,

Simetrične matrice

Za **<u>općenite</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. realne ili kompleksne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,
3. baza svojstvenih vektora možda postoji.

Za **<u>simetrične</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. **samo** realne,
   2. jednostruke ili višestruke;

Simetrične matrice

Za **<u>općenite</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. realne ili kompleksne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,
3. baza svojstvenih vektora možda postoji.

Za **<u>simetrične</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. **samo** realne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su **ortogonalni**,

Simetrične matrice

Za **<u>općenite</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. realne ili kompleksne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su linearno nezavisni,
3. baza svojstvenih vektora možda postoji.

Za **<u>simetrične</u>** kvadratne matrice vrijedi:

1. svojstvene vrijednosti mogu biti:
   1. **samo** realne,
   2. jednostruke ili višestruke;
2. svojstveni vektori s različitim svojstvenim vrijednostima su **ortogonalni**,
3. baza svojstvenih vektora **sigurno** postoji (štoviše, barem jedna takva baza je ortonormirana).