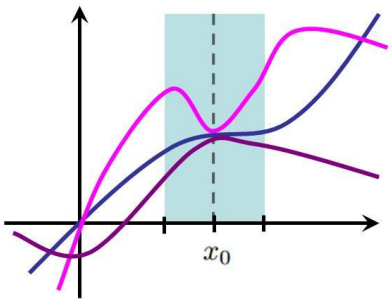
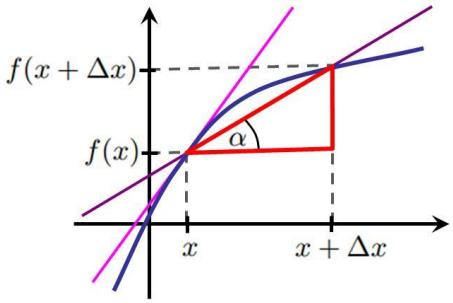
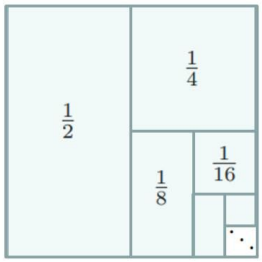
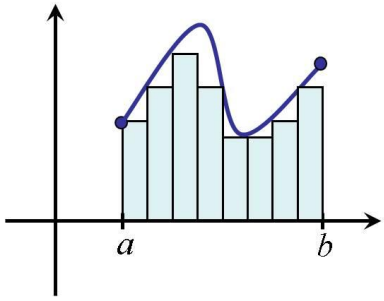
Matematička analiza
- 2016/17 -









Jelena Sedlar

Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu

Sadržaj

1 Osnove matematike **1**

1.1 Osnove matematičke logike . . . 1
1.2 Osnove teorije skupova . . . 2
1.3 Skupovi brojeva . . . 5
1.3.1 Skup prirodnih brojeva . . . 5
1.3.2 Skup cijelih brojeva . . . 6
1.3.3 Skup racionalnih brojeva . . . 7
1.3.4 Skup realnih brojeva . . . 8
1.3.5 Skup kompleksnih brojeva . . . 11
1.4 Binomni poučak . . . 15

2 Realne funkcije realne varijable **19**

2.1 Definicija funkcije . . . 19
2.2 Zadavanje funkcija . . . 24
2.3 Elementarne funkcije . . . 26
2.3.1 Osnovne elementarne funkcije . . . 26
2.3.2 Računske operacije s funkcijama . . . 33
2.3.3 (Složene) elementarne funkcije . . . 35
2.3.4 Neke klase složenih elementarnih funkcija . . . 36
2.4 Svojstva funkcija . . . 40
2.4.1 Omeđenost . . . 40
2.4.2 (Ne)parnost . . . 42
2.4.3 Periodičnost . . . 43
2.4.4 Monotonost . . . 44
2.4.5 Zakrivljenost . . . 45
2.5 Konačni i beskonačni skupovi . . . 47

3 Limes **51**

3.1 Definicija limesa . . . 51
3.1.1 Okoline i gomilišta . . . 51
3.1.2 Limes u konačnoj točki . . . 53
3.1.3 Limes u beskonačnosti . . . 54
3.1.4 Jednostrani limesi . . . 55
3.2 Limesi elementarnih funkcija . . . 57
3.2.1 Limesi osnovnih elementarnih funkcija . . . 57

3.2.2 Limesi i računske operacije s funkcijama . . . 58
3.3 Neki osnovni limesi i svojstva . . . 60

4 Neprekidnost **61**
4.1 Definicija neprekidnosti . . . 61
4.2 Neprekidnost elementarnih funkcija . . . 63
4.3 Neka svojstva neprekidne funkcije . . . 63

5 Derivacija **67**
5.1 Definicija derivacije . . . 67
5.2 Deriviranje elementarnih funkcija . . . 70
5.2.1 Pravila deriviranja . . . 70
5.2.2 Tablica osnovnih derivacija . . . 71
5.3 Deriviranje implicitno zadanih funkcija . . . 74
5.4 Logaritamsko deriviranje . . . 74
5.5 Definicija diferencijala . . . 75
5.6 Derivacije i diferencijali višeg reda . . . 76
5.7 Osnovni teoremi diferencijalnog računa . . . 77

6 Tok i graf funkcije **81**
6.1 Asimptopte . . . 81
6.2 Monotonost . . . 84
6.3 Zakrivljenost . . . 89

7 Nizovi i redovi **93**
7.1 Nizovi brojeva . . . 93
7.2 Redovi brojeva . . . 94
7.3 Nizovi i redovi funkcija . . . 98
7.4 Red potencija . . . 99
7.5 Taylorov red . . . 99

8 Neodređeni integral **101**
8.1 Definicija neodređenog integrala . . . 101
8.2 Integriranje elementarnih funkcija . . . 102
8.3 Metode integriranja . . . 104
8.3.1 Neposredno integriranje . . . 104
8.3.2 Metoda supstitucije . . . 104
8.3.3 Metoda parcijalne integracije . . . 105
8.3.4 Integriranje racionalnih funkcija . . . 106
8.3.5 Integriranje nekih iracionalnih funkcija . . . 106

9 Određeni integral **107**
9.1 Motivacija . . . 107
9.2 Darbouxov određeni integral . . . 108
9.3 Riemannov određeni integral . . . 113
9.4 Neka geometrijska svojstva . . . 115
9.5 Izračunavanje određenog integrala . . . 117

9.6 Nepravi integral 119
9.7 Primjene određenog integrala 121
9.7.1 Površina 121
9.7.2 Duljina luka 122
9.7.3 Volumen rotacijskog tijela 122
9.7.4 Oplošje rotacijskog tijela 123

Predgovor

Ova skripta je nastala kao nastavni tekst uz predavanja iz predmeta Matematička analiza preddiplomskog sveučilišnog studija geodezije i geoinformatike na Fakultetu građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu. Obrađena su poglavlja Osnove matematike, Realne funkcije realne varijable, Limes, Neprekidnost, Derivacija, Tok i graf, Nizovi i redovi, Neodređeni integral, Određeni integral. Radi se o standardnom sadržaju koji se predaje na većini tehničkih i prirodoslovnih fakulteta, pa postoje brojne knjige i skripte koje dijelom ili u potpunosti pokrivaju taj sadržaj. U zadnjem poglavlju navedene su reference za literaturu koja je najviše utjecala na sadržaj ovih nastavnih materijala, uglavnom zato što je ili dostupna na internetu ([5], [6], [7], [8], [9]) ili mi je bila dostupna u tiskanom izdanju ([1], [2], [3], [4]).

Ovi nastavni materijali su prilagođeni održavanju predavanja u 30 nastavnih sati, imaju 124 stranice nastavnog sadržaja i ilustrirani su sa preko 200 slika. Uz nastavne materijale izrađene su prezentacije sa dinamičkim slajdovima i animiranim ilustracijama koje su korisno nastavno pomagalo. U svom prvotnom obliku materijali su nastali za potrebe nastave akademske godine 2010/11 kad je pokrenut studij geodezije i geoinformatike na Fakultetu građevinarstva, arhitekture i geodezije, koristili su se u nastavi svih sljedećih godina, a svake godine su bili pomalo različiti kao rezultat nastojanja da ih što više približim studentima.

Konačno, na izradu ovih nastavnih materijala te ilustracija i prezentacija koje ga prate utrošila sam brojne sate, stoga ih smatram svojim vlasništvom i zadržavam sva prava nad njima.

Jelena Sedlar

Poglavlje 1

Osnove matematike

1.1 Osnove matematičke logike

Definicija 1.1 Sud (izjava) *je svaka smislena izjavna rečenica koja je samo istinita ili samo lažna.*

Zadatak 1.2 *Koja od sljedećih rečenica je sud: a) "Krava je životinja.", b) "Broj 4 je veći od broja 6.", c) "x je veće od 3." d) "Je li danas vruće?" Za one rečenice koje jesu sud utvrdi istinosnu vrijednost.*

Sudove ćemo označavati slovima $A, B, C, \ldots$. Istinosnu vrijednost suda A označavat ćemo s $t(A)$. Ako je sud A istinit, pisat ćemo $t(A) = \top$, a ako je neistinit pisat ćemo $t(A) = \bot$.

Definicija 1.3 *Neka su A i B sudovi.* Osnovne logičke operacije (veznici) *sa sudovima su:*

1. negacija, $\neg A$ *(čita se: "nije A"),*
2. konjukcija, $A \wedge B$ *(čita se: "A i B"),*
3. disjunkcija, $A \vee B$ *(čita se: "A ili B"),*
4. implikacija, $A \Rightarrow B$ *(čita se: "Ako je A, onda je B." ili još "Iz A slijedi B." ili još "A implicira B." ili još "A povlači B."),*
5. ekvivalencija, $A \Leftrightarrow B$ *(čita se: " A je ako i samo ako je B." ili još "A je ekvivalentno B." ili još "A implicira B." ili još "A povlači B.").*

Istinosna vrijednost složenih sudova, koji nastaju iz jednostavnijih sudova pomoću logičkih operacija sa sudovima, ne ovisi o sadržaju jednostavnijih sudova, nego samo o njihovoj istinosnoj vrijednosti i to po sljedećoj istinosnoj tablici:

$t(A)$	$t(B)$	$t(\neg A)$	$t(A \wedge B)$	$t(A \vee B)$	$t(A \Rightarrow B)$	$t(A \Leftrightarrow B)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$		$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$		$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

Zadatak 1.4 *Zadani su sudovi*

$$A = \text{"Split je u Dalmaciji."} \text{ i } B = \text{"Split nije na moru."}$$

Utvrdi istinosnu vrijednost sudova A i B, iskaži sudove $\rceil A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ i $A \Leftrightarrow B$, te im utvrdi istinosnu vrijednost.

Definicija 1.5 Otvorena rečenica *ili* predikat *je izjavna rečenica koja sadrži parametre i koja postaje sud kada parametri poprime određenu vrijednost.*

Primjer predikata je rečenica "x je paran broj". U toj rečenici parametar je x. Ako x poprimi vrijednost 4 ta rečenica postaje istinit sud, a ako x poprimi vrijednost 1 ta rečenica postaje lažan sud. Predikati mogu sadržavati i više parametara. Primjer za to je predikat "x je veće od y". Predikat s parametrom x označavamo s $P(x)$, a predikat s parametrima x i y označavamo s $P(x, y)$. Kad se izražavamo predikatima, najčešće koristimo *kvantifikatore*:

1. *univerzalni*, $(\forall x)P(x)$ (čitamo: "**za svaki** x je $P(x)$"),
2. *egzistencijalni*, $(\exists x)P(x)$ (čitamo: "**postoji** x za koji je $P(x)$"), te $(\exists!x)P(x)$ (čitamo: "**postoji točno jedan** x za koji je $P(x)$").

Često se koriste i kombinacije ovih kvantifikatora "za svaki ... postoji ...", te "postoji ... za svaki ...".

Zadatak 1.6 *Neka je $P(x)$ predikat "x je veće od 5". Iskaži rečenice: a) $(\forall x \in \mathbb{N})\ P(x)$, b) $(\exists x \in \mathbb{N})\ P(x)$, c) $(\exists! x \in \mathbb{N})\ P(x)$, te utvrdi njihovu istinosnu vrijednost.*

Zadatak 1.7 *Neka je $P(x)$ predikat "y je veće od x". Iskaži rečenice: a) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})P(x, y)$, b) $(\exists y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})P(x, y)$, te utvrdi njihovu istinosnu vrijednost.*

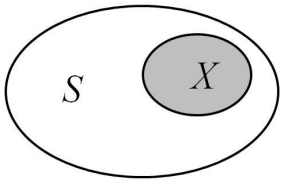
Zaključujemo da je poredak kvantificiranja u rečenici važan, jer sa različitim poretkom kvantificiranja dobivamo različite rečenice koje mogu imati različitu istinosnu vrijednost.

Definicija 1.8 Formula *je svaki izraz F sastavljen na logički dopustiv način od sudova, predikata, kvantifikatora, zagrada, znakova $\top$ i $\bot$, te logičkih operacija (veznika).*

Kažemo da su dvije formule $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ *ekvivalentne* ili *jednako vrijedne* ako imaju istu istinosnu vrijednost (tj. $t(\mathcal{F}) = t(\mathcal{G})$) za svaki mogući izbor njihovih varijabli.

1.2 Osnove teorije skupova

Pojam *skupa* je osnovni pojam u matematici, što znači da se ne definira tj. ne svodi se na jednostavnije pojmove. Njegova svojstva se zadaju aksiomatski, ali mi se ovdje u to nećemo upuštati. Svaki skup je određen svojim elementima. Skupove ćemo označavati velikim slovima A, S, X, ... elemente skupova malim slovima $a, b, x, \ldots$.Primjerice, ako se skup S sastoji od elemenata a, f, g, k, onda pišemo $S = \{a, f, g, k\}$. Ako je a element skupa S pišemo $a \in S$. Ako z nije element skupa S, pišemo $z \notin S$. Prazan skup označavamo sa ϕ.



Slika 1.1: Podskup X skupa S.

Definicija 1.9 *Neka je S skup. Kažemo da je skup X* podskup *skupa S (i pišemo $X \subseteq S$) ako je svaki element skupa X sadržan u skupu S. Kažemo još i da je S* nadskup *skupa X.*

Definicija podskupa ilustrirana je Slikom 1.1.

Podskup X skupa S možemo zadati pomoću nekog predikata $P(x)$ čiji parametri mogu biti elementi skupa S. Tada su elementi skupa X svi oni elementi skupa S za koje je predikat $P(x)$ istinit, te pišemo $X = \{x \in S : P(x)\}$.

Zadatak 1.10 *Odredi skup $X = \{x \in S : P(x)\}$ ako je $S = \{1, 3, 4, 7, 8\}$, a predikat $P(x)$ glasi "x je paran".*

Definicija 1.11 *Kažemo da su skupovi X i Y* jednaki *(i pišemo $X = Y$) ako vrijedi $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq X$. U suprotnom kažemo da su skupovi X i Y* različiti *(pišemo $X \neq Y$).*

Kažemo da je skup X *pravi podskup* skupa Y ako je $X \subseteq Y$ i $X \neq Y$.

Definicija 1.12 *Neka je S skup, te X i Y podskupovi skupa S. Definiramo sljedeće skupove.*

1. Unija *skupova X i Y je skup $X \cup Y$ koji sadrži elemente skupa S koji su sadržani u X ili u Y.*
2. Presjek *skupova X i Y je skup $X \cap Y$ koji sadrži elemente skupa S koji su sadržani u X i u Y.*
3. Razlika *skupova X i Y je skup $X \backslash Y$ koji sadrži elemente skupa S koji su sadržani u skupu X, a nisu sadržani u skupu Y.*
4. Komplement *skupa X je skup $c(X)$ koji sadrži elemente skupa S koji nisu sadržani u skupu X.*

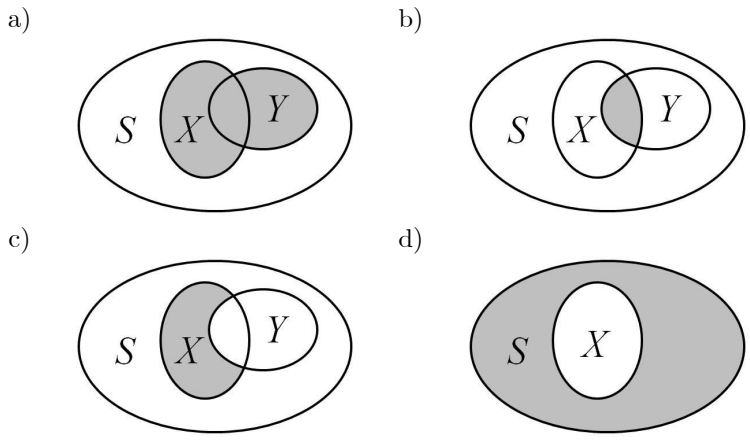
Unija, presjek, razlika, te komplement skupa su ilustrirani Slikom 1.2.

Zadatak 1.13 *Neka je $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $X = \{2, 3, 7, 9\}$, $Y = \{1, 2, 7, 8, 10\}$. Odredi $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \backslash Y$ i $c(X)$.*

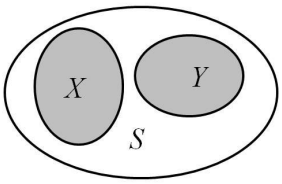
Definicija 1.14 *Kažemo da su skupovi $X, Y \subseteq S$* disjunktni*, ako je $X \cap Y = \phi$.*

Pojam disjunktnih skupova ilustriran je Slikom 1.3.

Definicija 1.15 Direktni produkt *ili* kartezijev produkt *skupova X i Y je skup $X \times Y$ uređenih parova (x, y) pri čemu je $x \in X$ i $y \in Y$.*



Slika 1.2: Operacije sa skupovima: a) unija $X \cup Y$, b) presjek $X \cap Y$, c) razlika $X \backslash Y$, d) komplement $c(X)$.



Slika 1.3: Disjunktni skupovi $X, Y \subseteq S$.

Zadatak 1.16 *Odredi $X \times Y$ ako je $X = \{1, 3, 7\}$ i $Y = \{a, c\}$.*

Posebno je važan direktni produkt skupa X sa samim sobom, tj. skup $X^2 = X \times X = \{(x, x') : x, x' \in X\}$.

Definicija 1.17 Binarna relacija *na skupu X je svaki skup $R \subseteq X \times X$. Ako je $(x, x') \in R$, onda pišemo još i xRx' i kažemo da je* element x u relaciji R sa elementom x' skupa X.

Kao primjer možemo uzeti da je X skup stanara neke zgrade, pri čemu relacija R može biti zadana odnosom "poznavati se", "biti mlađi" ili odnosom "stanovati na istom katu".

Definicija 1.18 *Za binarnu relaciju R na skupu X kažemo da je:*

- refleksivna*, ako za svaki $x \in X$ vrijedi xRx,*
- simetrična*, ako za svaki par $x, y \in X$ iz xRy slijedi yRx,*
- antisimetrična*, ako za svaki par $x, y \in X$ iz xRy i yRx slijedi $x = y$,*
- tranzitivna*, ako za svaku trojku $x, y, z \in X$ iz xRy i yRz slijedi xRz.*

Zadatak 1.19 *Skup X je skup stanara neke zgrade. Utvrdi je li relacija R refleksivna, simetrična, antisimetrična ili tranzitivna, ako je R relacija : a)"poznavati se", b) "biti mlađi (ili jednako star)", c) "stanovati na istom katu".*

Definicija 1.20 *Binarnu relaciju R na skupu X koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna zovemo* relacijom ekvivalencije *i označavamo sa $\sim$ (tilda). Za dva elementa skupa X koji su u relaciji ekvivalencije $\sim$ kažemo da su* ekvivalentni.

Relacija ekvivalencije na skupu X cijepa skup X na disjunktne klase, tako da su svaka dva elementa iz iste klase međusobno ekvivalentna, a nikoja dva elementa iz različitih klasa nisu ekvivalentni. Kao primjer relacije ekvivalencije možemo navesti relaciju "biti paralelan" na skupu pravaca (klase ekvivalencije su skupovi paralelnih pravaca), te relaciju "biti sličan" na skupu trokutova (klase ekvivalencije su skupovi sličnih trokutova).

Definicija 1.21 *Binarnu relaciju R na skupu X koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna zovemo* relacijom uređaja.

Primjer relacije uređaja koji se u matematici najčešće koristi su relacije "$\leq$" i "$\geq$" na skupovima brojeva.

1.3 Skupovi brojeva

1.3.1 Skup prirodnih brojeva

Skup

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

zove se skup cijelih brojeva.

Računske operacije na skupu $\mathbb{N}$. Na skupu $\mathbb{N}$ postoji funkcija 'sljedbenik' koja svakom elementu $n \in \mathbb{N}$ pridružuje njegov sljedbenik $s(n) \in \mathbb{N}$. Ta funkcija nam omogućava da definiramo operacije zbrajanja i množenja na skupu $\mathbb{N}$.

Zbrajanje: za svaki $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

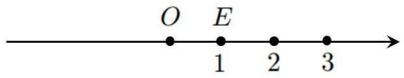
$$m + 1 = s(m), \quad m + s(n) = s(m + n).$$

Množenje: za svaki $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$m \cdot 1 = m, \quad m \cdot s(n) = m \cdot n + m.$$

Uređaj na skupu $\mathbb{N}$. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ dva prirodna broja. Kažemo da je m *manji* od n (i pišemo $m < n$) ako i samo ako postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $m + p = n$. Nadalje, kažemo da je m *manji ili jednak* n (i pišemo $m \leq n$) ako je $m < n$ ili $m = n$.

Geometrijski prikaz skupa $\mathbb{N}$. Skup $\mathbb{N}$ se geometrijski prikazuje na pravcu. Neka je pravac određen točkama O i E. Dužinu $\overline{OE}$ smatrat ćemo jediničnom dužinom, smjer na pravcu od O prema E smatrat ćemo pozitivnim smjerom, a suprotan smjer negativnim. Točka E predstavlja prirodni broj 1. Prirodnom broju n pridružujemo onu točku pravca koja se dobije kad se dužina $\overline{OE}$ nanese od točke O n puta u pozitivnom smjeru. Smještaj prirodnih brojeva na pravcu prikazan je Slikom 1.4.



Slika 1.4: Geometrijski prikaz skupa $\mathbb{N}$.

Matematička indukcija. Indukcija je metoda zaključivanja koja ide od pojedinačnog prema općem. Principom matematičke indukcije se mogu dokazivati tvrdnje o prirodnim brojevima. Označimo sa $T(n)$ neku tvrdnju o prirodnim brojevima. Pitamo se da li tvrdnja $T(n)$ vrijedi za svaki prirodni broj n.

Postupak je sljedeći:

1. (*baza indukcije*) Ispitujemo da li tvrdnja vrijedi za $n = 1$ (tj. da li vrijedi $T(1)$).

2. (*korak indukcije*) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, te ispitujemo da li tada tvrdnja vrijedi i za $n + 1$.

Ako se u bazi indukcije pokaže da tvrdnja vrijedi za $n = 1$, te ako se u koraku indukcije dokaže da iz $T(n)$ slijedi da vrijedi i $T(n + 1)$, tada tvrdnja $T(n)$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako se u bazi indukcije dokaže da tvrdnja vrijedi ne za $n = 1$, nego npr. za $n = n_0$, tada je matematičkom indukcijom tvrdnja $T(n)$ dokazana ne za svaki $n \in N$, nego za svaki $n \geq n_0$.

Zadatak 1.22 *Dokažimo matematičkom indukcijom da za svaki $n \in N$ vrijedi tvrdnja*

$$1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

1.3.2 Skup cijelih brojeva

Podsjetimo se da u slučaju $m > n$ (za $m, n \in \mathbb{N}$) postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $n + p = m$. Tada pišemo još i $p = m - n$, te kažemo da je "p jednako m minus n". Jasno je da "$-$" ne može biti operacija na skupu $\mathbb{N}$ jer za $m \leq n$ ne znamo što bi $m - n$ značilo. Kažemo još i da skup $\mathbb{N}$ nije zatvoren na oduzimanje. To vodi na zamisao da se skup $\mathbb{N}$ proširi tako da postane zatvoren na oduzimanje, i to na način da se svaka razlika $m - n$ (uočimo da se razlika može shvatiti kao uređeni par $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$) proglasi brojem. One razlike u kojima je $m > n$ daju prirodne brojeve, a one razlike u kojima je $m \leq n$ daju nove brojeve koji čine proširenje skupa $\mathbb{N}$. No, postoji jedan problem - uočimo da može biti $p = m_1 - n_1$ i $p = m_2 - n_2$ pri čemu je $m_1 \neq m_2$ i $n_1 \neq n_2$. Potrebno je dakle poistovijetiti parove $m_1 - n_1$ i $m_2 - n_2$. To radimo uvođenjem relacije ekvivalencije na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Kažemo da su parovi $m_1 - n_1$ i $m_2 - n_2$ ekvivalentni ako vrijedi $m_1 + n_2 = m_2 + n_1$. Lako se vidi da je ovako definirana relacija uistinu relacija ekvivalencije, pa dakle dijeli skup razlika $m - n$ na klase ekvivalencije. Klasu razlike $m - n$ označavamo sa $[m - n]$. Sada definiramo

$$\mathbb{Z} = \{[m - n] : m, n \in \mathbb{N}\}.$$

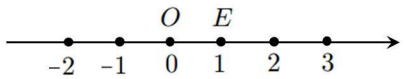
Radi jednostavnijeg zapisa, uvodimo sljedeće oznake

$$[m-n] = \begin{cases} p, & \text{za } m > n \text{ i } n+p = m, \\ 0, & \text{za } m = n, \\ -p, & \text{za } m < n \text{ i } m+p = n, \end{cases}$$

pri čemu je $p \in \mathbb{N}$. Dakle,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Računske operacije zbrajanja i množenja, te relaciju uređaja definiramo slično kao na skupu $\mathbb{N}$. Uočimo da je $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, jer se prirodni broj p može poistovijetiti s razlikom $m-n$, gdje je $m = p+1$ a $n = 1$. Geometrijski, skup $\mathbb{Z}$ se prikazuje na pravcu tako da se prirodni brojevi prikažu kao prije, točka O predstavlja broj 0, a negativni cijeli brojevi se dobiju nanošenjem jedinične dužine $\overline{OE}$ u negativnom smjeru. Smještaj cijelih brojeva na pravac prikazan je Slikom 1.5.



Slika 1.5: Geometrijski prikaz skupa $\mathbb{Z}$.

1.3.3 Skup racionalnih brojeva

Uočimo da za cijele brojeve $n, p \in \mathbb{Z}$ postoji broj $m \in \mathbb{Z}$ takav da je $n \cdot p = m$. Tada pišemo još $p = \frac{m}{n}$ i kažemo da je "p jednako m dijeljeno n". Naravno, dijeljenje $\frac{m}{n}$ ne može biti operacija na skupu $\mathbb{Z}$ jer za mnoge parove $m, n \in \mathbb{Z}$ ne znamo što bi $\frac{m}{n}$ bilo u skupu $\mathbb{Z}$. Kažemo još da skup $\mathbb{Z}$ nije zatvoren na dijeljenje. To vodi na zamisao da se skup $\mathbb{Z}$ proširi tako da postane zatvoren na dijeljenje, i to na način da se svaki razlomak $\frac{m}{n}$ (uočimo da se razlomak $\frac{m}{n}$ može shvatiti kao uređeni par $(m, n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$) proglasi brojem. Oni razlomci $\frac{m}{n}$ za koje je $m = n \cdot p$ daju cijele brojeve, a ostali razlomci $\frac{m}{n}$ čine proširenje skupa $\mathbb{Z}$. No, postoji jedan problem - uočimo da može biti $p = \frac{m_1}{n_1}$ i $p = \frac{m_2}{n_2}$ pri čemu je $m_1 \neq m_2$ i $n_1 \neq n_2$. Potrebno je dakle poistovijetiti parove $\frac{m_1}{n_1}$ i $\frac{m_2}{n_2}$. To radimo uvođenjem relacije ekvivalencije na skupu $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Kažemo da su parovi $\frac{m_1}{n_1}$ i $\frac{m_2}{n_2}$ ekvivalentni ako vrijedi $m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$. Lako se vidi da je ovako definirana relacija uistinu relacija ekvivalencije, pa dakle dijeli skup razlomaka $\frac{m}{n}$ na klase ekvivalencije. Klasu razlomka $\frac{m}{n}$ označavamo sa $\left[\frac{m}{n}\right]$, pa definiramo skup

$$\mathbb{Q} = \left\{ \left[\frac{m}{n}\right] : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

kojeg nazivamo *skupom racionalnih brojeva*. Radi jednostavnijeg zapisa, često pišemo samo $\frac{m}{n}$ podrazumijevajući pri tom $\left[\frac{m}{n}\right]$.

Računske operacije na skupu $\mathbb{Q}$. Neka su $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}$. Definiramo

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} &= \frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}, \\ \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} &= \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}, \end{aligned}$$

te ako je $m_2 \neq 0$ tada i

$$\frac{\frac{m_1}{n_1}}{\frac{m_2}{n_2}} = \frac{m_1 \cdot n_2}{m_2 \cdot n_1}.$$

Uređaj na skupu $\mathbb{Q}$. Neka su $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}$. Kažemo da je

$$\frac{m_1}{n_1} \leq \frac{m_2}{n_2}$$

ako i samo ako vrijedi

$$m_1 \cdot n_2 \leq m_2 \cdot n_1.$$

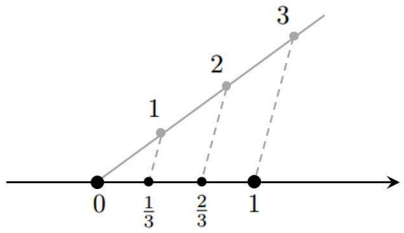
Sada kad smo uveli uređaj na skupu $\mathbb{Q}$, možemo uočiti da skup $\mathbb{Q}$ ima jedno zanimljivo svojstvo. Naime, između svaka dva racionalna broja postoji racionalni broj različit od ta dva. Jedan takav broj koji se nalazi između brojeva $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}$ je aritmetička sredina tih brojeva, tj. broj

$$\frac{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}}{2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{2 n_1 n_2}.$$

Svaki skup koji ima to svojstvo nazivamo *gustim skupom*. Dakle, skup $\mathbb{Q}$ je gust, dok skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ nisu gusti.

Uočimo da je $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ jer se cijeli broj m može poistovijetiti s racionalnim brojem $\frac{m}{1}$, te pri takvom poistovjećivanju ostaju sačuvane operacije zbrajanja i množenja.

Geometrijski prikaz skupa $\mathbb{Q}$. Skup racionalnih brojeva prikazuje se na brojevnom pravcu. Obzirom da je $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, već znamo kako se ti brojevi prikazuju na pravcu. Na Slici 1.6 prikazano je kako se razlomci oblika $\frac{m}{n}$ (za $m < n$) nanose na pravac. Ostali razlomci oblika $\frac{m}{n}$ dobivaju se nanošenjem dužine $\frac{1}{n}$ na brojevni pravac m puta od točke O u pozitivnom ili negativnom smjeru ovisno o predzanku razlomka.

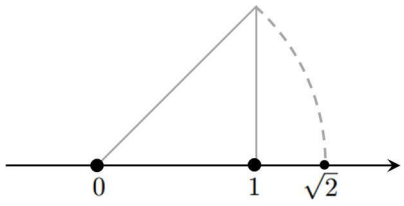


Slika 1.6: Geometrijski prikaz razlomaka $\frac{m}{n}$ za $0 \leq m \leq n$.

1.3.4 Skup realnih brojeva

Svi skupovi brojeva koje smo do sad definirali mogu se nanijeti na brojevni pravac. Očito je da brojevi iz skupa $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ ne pokrivaju sve točke pravca, jer ti skupovi nisu gusti. No, činjenica da skup $\mathbb{Q}$ jest gust navodi na pomisao da bi skup $\mathbb{Q}$ mogao pokrivati cijeli pravac. Međutim, još u antici

je uočeno da se hipotenuza pravokutnog trokuta kojemu su katete duljine jedan može nanijeti na brojevni pravac (vidi Sliku 1.7), ali da to nije racionalni broj. Zaključujemo, dakle, da ipak postoje točke na pravcu koje nisu pokrivene brojevima iz skupa $\mathbb{Q}$. Za svaku takvu točku definiramo po jedan broj kojeg nazivamo iracionalnim, a skup svih iracionalnih brojeva označavamo sa $\mathbb{I}$.



Slika 1.7: Nanošenje hipotenuze pravokutnog trokuta s katetama duljine 1 na brojevni pravac.

Iz definicije skupa iracionalnih brojeva očito slijedi $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \phi$ i $\mathbb{I} \neq \phi$ (jer je barem $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$). Sada možemo definirati skup realnih brojeva na sljedeći način.

Definicija 1.23 Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ *je unija skupa racionalnih brojeva* $\mathbb{Q}$ *i skupa iracionalnih brojeva* $\mathbb{I}$.

Iz definicije skupa $\mathbb{R}$ očito slijedi $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ i da se skup $\mathbb{R}$ prikazuje geometrijski pravcem, pri čemu je svaka točka na pravcu pokrivena brojem iz $\mathbb{R}$.

Računske operacije u skupu $\mathbb{R}$. Računske operacije na skupu $\mathbb{R}$ uvode se tako da poštuju već definirane računske operacije na skupu $\mathbb{Q}$, a računske operacije s brojevima iz $\mathbb{I}$ definiraju se pomoću računskih operacija na skupu $\mathbb{Q}$.

Uređaj u skupu $\mathbb{R}$. Slično kao računske operacije, i uređaj na skupu $\mathbb{R}$ se uvodi tako da poštuje već definiran uređaj $\mathbb{Q}$, a uređaj s brojevima iz $\mathbb{I}$ definira se pomoću uređaja na skupu $\mathbb{Q}$.

Definicija 1.24 *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$. *Definiramo skupove*

$$\begin{aligned} \langle a,b\rangle &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\ \langle a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \\ [a,b\rangle &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \\ [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}. \end{aligned}$$

koje nazivamo omeđenim *(ili* ograničenim*)* intervalima. *Skup* $\langle a,b\rangle$ *nazivamo* otvorenim *intervalom, skup* $[a,b]$ zatvorenim *intervalom ili još* segmentom, *a skupove* $\langle a,b]$ *i* $[a,b\rangle$ poluotvornim *(ili* poluzatvorenim*) intervalima.*

Definicija 1.25 *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Definiramo skupove*

$$\begin{aligned} \langle a, +\infty\rangle &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \\ [a, +\infty\rangle &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \\ \langle -\infty, b\rangle &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}, \\ \langle -\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \\ \langle -\infty, +\infty\rangle &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

koje nazivamo neomeđenim *(ili* neograničenim*)* intervalima.

Definicija 1.26 *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je $m \in X$* minimum *skupa X ako vrijedi $m \leq x$ za svaki $x \in X$. Kažemo da je $M \in X$* maksimum *skupa X ako vrijedi $x \leq M$ za svaki $x \in X$.*

Uočimo da skup ne mora imati ni minimum, ni maksimum. Primjerice, skupovi $[a, +\infty\rangle$ i $[a, b\rangle$ nemaju maksimum, skupovi $\langle -\infty, b]$ i $\langle a, b]$ nemaju minimum, skupovi $\langle a, b\rangle$ i $\langle -\infty, +\infty\rangle$ nemaju ni minimum ni maksimum, dok skup $[a, b]$ ima i minimum i maksimum.

Definicija 1.27 *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je $m \in \mathbb{R}$* donja međa *skupa X ako vrijedi $m \leq x$ za svaki $x \in X$. Kažemo da je $M \in \mathbb{R}$* gornja međa *skupa X ako vrijedi $x \leq M$ za svaki $x \in X$. Kažemo da je skup X* omeđen odozdol *ako ima donju među,* omeđen odozgor *ako ima gornju među, te da je* omeđen *ako je omeđen i odozdol i odozgor.*

Često se umjesto riječi 'međa' i 'omeđen' koriste riječi 'granica' i ograničen'. Uočimo da je jedina razlika između minimuma (odnosno maksimuma) i donje međe (odnosno gornje međe) u tome da minimum (odnosno maksimum) mora pripadati skupu X, dok međa ne mora. Dakle, minimum i maksimum su međe koje pripadaju skupu X.

Definicija 1.28 *Ako je skup $X \subseteq \mathbb{R}$ omeđen odozgor, onda za najmanju gornju među kažemo da je* supremum *skupa X (pišemo $\sup X$). Ako je skup $X \subseteq \mathbb{R}$ omeđen odozdol, onda za najveću donju među kažemo da je* infimum *skupa X (pišemo $\inf X$).*

Lako se vidi da je minimum (odnosno maksimum) skupa, ako postoji, ujedno infimum (odnosno supremum) skupa. No, skup ne mora imati minimum i/ili maksimum.

Teorem 1.29 *Svaki neprazni i odozdol (odnosno odozgor) omeđeni skup $X \subseteq \mathbb{R}$ ima infimum (odnosno supremum).*

Zadatak 1.30 *Odredi minimum, maksimum, infimum i supremum skupa X, ako je: a) $X = [-1, 3] \cup \langle 5, 11\rangle$, b) $X = \langle -\infty, 0\rangle \cup \{5\}$, c) $X = \left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\right\}$, d) $X = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\right\}$, e) $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.*

Apsolutna vrijednost realnog broja.

Definicija 1.31 Apsolutna vrijednost *realnog broja $x \in \mathbb{R}$ (kažemo još i* modul *realnog broja) definirana je pravilom*

$$|x| = \begin{cases} x, & za\ x \geq 0, \\ -x, & za\ x < 0. \end{cases}$$

Uočimo da je $|x| \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, te $|x| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$. Nadalje, ovako definirana funkcija daje udaljenost broja x od ishodišta na brojevnom pravcu. Primjerice, udaljenost broja $x = 3$ od ishodišta je $|3| = 3$, a udaljenost broja $x = -2$ od ishodišta je $|-2| = -(-2) = 2$. Neka svojstva apsolutne vrijednosti su:

1. $|x| = |-x|$,
2. $-|x| \leq x \leq |x|$,
3. $|xy| = |x|\,|y|$,
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ za $y \neq 0$,
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (nejednakost trokuta).

Zadatak 1.32 *U skupu* $\mathbb{R}$ *riješi jednadžbe* $|x| = 1$ *i* $|x - 2| = 5$.

Zadatak 1.33 *U skupu* $\mathbb{R}$ *riješi nejednadžbe* $|x| \leq 3$, $|x + 1| > 4$.

1.3.5 Skup kompleksnih brojeva

Uočimo da jednadžba $x^2 = -1$ nema rješenje u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$, tj. ne postoji realni broj čiji kvadrat je jednak -1. No, mi možemo 'zamisliti' da takav broj postoji, proširiti skup realnih brojeva tim brojem, te razmatrati koje posljedice to ima.

Definicija 1.34 *Imaginarna jedinica* i *je broj sa svojstvom* $i^2 = -1$.

Uočimo da iz definicije imaginarne jedinice slijede neka svojstva te jedinice. Primjerice, vrijedi

$$\begin{array}{lll} i, & i^5 = i, & i^9 = i, \\ i^2 = -1, & i^6 = -1, & \cdots \\ i^3 = -i, & i^7 = -i, & \\ i^4 = 1, & i^8 = 1, & \end{array}$$

Možemo neformalnije reći da se vrijednost cjelobrojne potencije imaginarne jedinice periodično ponavlja svako 4 potencije. Formalno matematički kažemo da imaginarna jedinica ima svojstvo

$$i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i,\ i^{4k+4} = 1$$

za svaki $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Zadatak 1.35 *Odredi: a)* i^{323}, *b)* i^{426}, *c)* i^{77}.

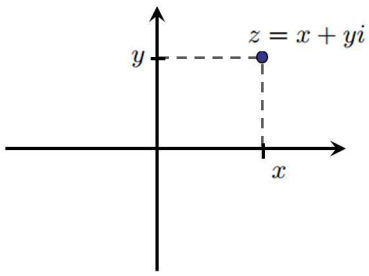
Sada kad smo uveli imaginarnu jedinicu, možemo definirati kompleksne brojeve.

Definicija 1.36 Kompleksni broj *je svaki broj* z *oblika* $z = x + yi$, *pri čemu su* $x, y \in \mathbb{R}$. *Broj* x *se zove* realni dio *broja* z *i označava s* $\operatorname{Re} z$, *broj* y *se zove* imaginarni dio *broja* z *i označava s* $\operatorname{Im} z$. *Prikaz kompleksong broja u obliku* $z = x + yi$ *naziva se* algebarski prikaz kompleksnog broja.

Definicija 1.37 Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ *definiran je sa* $\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Uočimo da je skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ proširenje skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ (tj. vrijedi $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$) jer se svaki realni broj $x \in \mathbb{R}$ može shvatiti kao kompleksni broj $x = x + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$.

Geometrijski se kompleksni brojevi prikazuju kao točke u ravnini. Naime, svaki kompleksni broj $z = x + yi$ u potpunosti je određen ako je zadan njegov realni dio $x \in \mathbb{R}$ i njegov imaginarni dio $y \in \mathbb{R}$, što se može shvatiti i kao uređeni par realnih brojeva $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ koji se grafički prikazuje kao točka $T(x, y)$ ravnine (vidi Sliku 1.8).



Slika 1.8: Geometrijski prikaz kompleksnog broja $z = x + yi$.

Zadatak 1.38 *Odredi* $\operatorname{Re} z$ *i* $\operatorname{Im} z$*, te prikaži* z *u kompleksnoj ravnini, ako je: a)* $z = 1 + 4i$*, b)* $z = 2i - 1$*, c)* $z = -2i$*, d)* $z = 4$.

Zadatak 1.39 *Odredi gdje u kompleksnoj ravnini leže kompleksni brojevi za koje je: a)* $\operatorname{Re} z = 1$*, b)* $\operatorname{Im} z = 3$.

Zadatak 1.40 *Odredi gdje u kompleksnoj ravnini leže kompleksni brojevi za koje je: a)* $\operatorname{Re} z > 2$*, b)* $\operatorname{Im} z \leq -1$*, c)* $\operatorname{Re} z > 1$ *i* $-2 \leq \operatorname{Im} z < 1$.

Uvedimo sada neke osnovne pojmove koji se vezuju uz pojam kompleksnog broja.

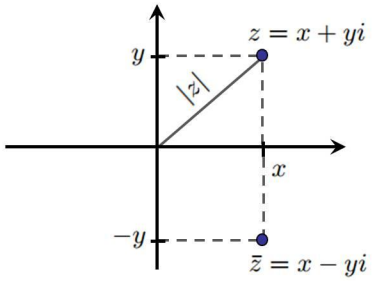
Definicija 1.41 *Neka je* $z = x + yi$ *kompleksni broj.* Kompleksno konjugirani broj $\overline{z}$ *broja* z *definiran je sa* $\overline{z} = x - yi$. Apsolutna vrijednost *ili* modul $|z|$ *broja* z *definirana je sa* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Geometrijski, kompleksno konjugirani broj $\overline{z}$ je u kompleksnoj ravnini simetričan broju z obzirom na os x. Apsolutna vrijednost $|z|$ geometrijski predstavlja udaljenost broja z u kompleksnoj ravnini od ishodišta (vidi Sliku 1.9).

Zadatak 1.42 *Odredi* $\overline{z}$ *i* $|z|$ *za: a)* $z = 2 + 3i$*, b)* $z = i - \sqrt{3}$*, c)* $z = -5$*, d)* $z = 2i$.

Zadatak 1.43 *Skiciraj gdje u kompleksnoj ravnini leže kompleksni brojevi za koje je: a)* $|z| = 2$*, b)* $|z| > 1$*, c)* $|z| \leq 3$*, d)* $|z - 1 + i| < \sqrt{2}$.

Računske operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja na skupu $\mathbb{C}$ uvodimo sljedećom definicijom.



Slika 1.9: Geometrijsko značenje kompleksno konjugiranog broja $\bar{z}$ i apsolutne vrijednosti $|z|$.

Definicija 1.44 *Neka su $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ dva kompleksna broja. Definiramo*

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, \\ z_1 - z_2 &= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i, \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1 i)\,(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} i, \ \text{za } z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Relacija uređaja (relacija "$\leq$" ili "$\geq$") na skupu $\mathbb{C}$ nije definirana, što znači da se za dva kompleksna broja ne može reći koji je manji ili veći od drugoga.

Zadatak 1.45 *Izračunaj $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, te $\frac{z_1}{z_2}$ ako je $z_1 = 1 + i$, a $z_2 = 2 - 3i$.*

Zadatak 1.46 *Odredi* $\operatorname{Re} z$ *i* $\operatorname{Im} z$ *ako je: a) $z = \frac{2+3i}{4}$, b) $z = \frac{1}{2+2i}$.*

Uočimo da se točka $T(x, y)$ ravnine, osim pravokutnim koordinatama x i y, može jednoznačno zadati i pomoću dviju polarnih koordinata r i φ, pri čemu je r udaljenost od ishodišta, a φ kut kojeg polupravac OT zatvara s pozitivnim smjerom osi x (vidi Sliku 1.10). Uočimo da iz trigonometrije pravokutnog trokuta slijedi

$$x = r\cos\varphi \text{ i } y = r\sin\varphi,$$

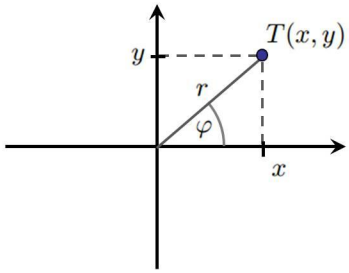
dok iz Pitagorinog poučka i trigonometrije pravokutnog trokuta slijedi

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ i } \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Uočimo da se sada kompleksni broj $z = x + yi$ može prikazati kao

$$z = x + yi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Definicija 1.47 *Prikaz kompleksong broja u obliku $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ naziva se* trigonometrijski prikaz kompleksnog broja. *Broj r naziva se* modul, *a broj φ* argument *kompleksnog broja.*



Slika 1.10: Pravokutne i polarne koordinate u ravnini.

Zadatak 1.48 *Prikaži u trigonometrijskom obliku kompleksne brojeve: a)* $z = 1 + \sqrt{3}i$, *b)* $z = 2 - \sqrt{2}i$, *c)* $z = 3$, *d)* $z = -2i$.

Zadatak 1.49 *Skiciraj gdje u kompleksnoj ravnini leže brojevi* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *za koje vrijedi: a)* $r > 1$ *i* $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, *b)* $1 \leq r < 3$ *i* $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$.

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja pogodan je za potenciranje i korjenovanje kompleksnog broja, no da bismo to pokazali najprije je potrebno uvesti formulu za množenje i dijeljenje kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku.

Propozicija 1.50 *Neka su* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *i* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ *kompleksni brojevi. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \text{ za } z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 1.51 *Odredi* $z_1 \cdot z_2$ *i* $\frac{z_1}{z_2}$ *ako je:*

$$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \text{ i } z_2 = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}).$$

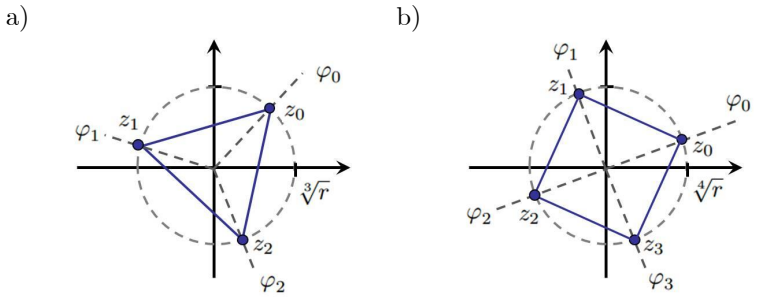
Iz formula za zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku prilično jednostavno slijede formule za potenciranje i korjenovanje kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku.

Propozicija 1.52 *Neka je* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *kompleksni broj. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} z^n &= r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)), \\ \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r}\,(\cos(\varphi_0 + k\cdot\Delta\varphi) + i\sin(\varphi_0 + k\cdot\Delta\varphi)) \text{ za } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \end{aligned}$$

pri čemu je $\varphi_0 = \frac{\varphi}{n}$, $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}$.

Uočimo da iz oblika formule za $\sqrt[n]{z}$ slijedi da svaki kompleksni broj $z \neq 0$ ima n različitih korijenova koji svi leže na centralnoj kružnici radijusa $\sqrt[n]{r}$ i dijele kružnicu na n jednakih dijelova (vidi Sliku 1.11).



Slika 1.11: Svi korjenovi: a) $\sqrt[3]{z}$, b) $\sqrt[4]{z}$.

Zadatak 1.53 *Izračunaj z^3 i z^{15} ako je $z = 2(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15})$.*

Zadatak 1.54 *Odredi i skiciraj u kompleksnoj ravnini sve kompleksne brojeve za koje je: a) $z^3 = 8$, b) $z^4 = 1 - \sqrt{3}i$.*

Konačno, u nekim primjenama se često koristi i sljedeći prikaz kompleksnog broja.

Definicija 1.55 *Neka kompleksni broj z ima modul r i argument φ. Prikaz kompleksnog broja z u obliku $z = re^{i\varphi}$ naziva se eksponencijalni prikaz kompleksnog broja.*

Motivacija za definiranje ovakvog prikaza kompleksnog broja dolazi iz razvoja funkcija e^x, $\sin x$ i $\cos x$ u red, a o čemu će biti više riječi u kasnijim poglavljima.

1.4 Binomni poučak

Neka su x i y dva realna (ili kompleksna) broja. *Binom* je izraz oblika $x + y$, a *potencija binoma* je izraz oblika $(x+y)^n$ gdje je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Uočimo da za prvih nekoliko prirodnih brojeva $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi

$$\begin{aligned}(x+y)^0 &= 1,\\ (x+y)^1 &= x+y,\\ (x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2,\\ (x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.\end{aligned}$$

Postavlja se pitanje kako odrediti koeficijente u razvoju binoma $(x+y)^n$ za općenitu potenciju n. Uočimo da za potenciju n razvoj ima točno $n+1$ koeficijenata koje možemo označiti sa $k = 0, 1, \ldots, n$. Dakle, $k-$ti koeficijent u razvoju binoma $(x+y)^n$ možemo označiti sa $\binom{n}{k}$. Primjerice, za $n = 2$ imamo

$$\binom{2}{0} = 1,\ \binom{2}{1} = 2,\ \binom{2}{2} = 1,$$

dok za $n = 3$ imamo

$$\binom{3}{0} = 1,\ \binom{3}{1} = 3,\ \binom{3}{2} = 3,\ \binom{3}{3} = 1.$$

Sada se postavlja pitanje kako odrediti taj koeficijent za više potencije. Jedan način je razmnožavanje binoma, što je mukotrpno. Drugi način, puno elegantniji, je pronaći formulu po kojoj bi se taj koeficijent izračunavao (ako takva formula uopće postoji). Prisjetimo se najprije da je za $n \in \mathbb{N}$ faktorijel $n!$ definiran sa $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, a definicija je proširena sa $0! = 1$.

Definicija 1.56 *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sa svojstvom $k \leq n$.* Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ *je broj definiran sa*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Zadatak 1.57 *Izračunaj binomne koeficijente: a) $\binom{6}{3}$, b) $\binom{8}{2}$, c) $\binom{7}{1}$, d) $\binom{4}{0}$.*

Uočimo da vrijedi

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Ovu formulu možemo koristiti za lakše računanje binomnog koeficijenta u slučaju kad je k veći od $\frac{n}{2}$.

Zadatak 1.58 *Izračunaj binomne koeficijente: a) $\binom{9}{7}$, b) $\binom{13}{9}$, c) $\binom{13}{10}$.*

Uočimo da ovime još nismo pokazali da je ovako definirani broj uistinu koeficijent u razvoju binoma, nego je to tek definicija nekog broja kojeg smo označili s $\binom{n}{k}$. Tek sljedeći teorem, koji se naziva binomni teorem ili još binomni poučak, govori da je tako definiran broj $\binom{n}{k}$ uistinu $k-$ti koeficijent u razvoju binoma $(x+y)^n$.

Teorem 1.59 (Binomni poučak) *Neka su x i y dva realna (ili kompleksna) broja. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

Zadatak 1.60 *Odredi koeficijente u razvoju binoma $(x+y)^4$.*

Uobičajilo se binomne koeficijente prikazivati u tzv. Pascalovom trokutu, koji nastaje tako da se u $n-$tom retku trokuta poredaju binomni koeficijenti $\binom{n}{k}$ za $k = 0, 1, \ldots, n$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
\ldots & & & & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Uočimo da za binomne koeficijente vrijedi:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ za svaki $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sa svojstvom $k < n$,

3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ za svaki $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sa svojstvom $k \leq n$.

Pomoću ovih svojstava Pascalov trokut se jako lako izgrađuje. Naime, prvo svojstvo znači da se na vanjskom rubu trokuta nalaze jedinice. Drugo svojstvo kaže da svaki unutarnji element trokuta nastaje kao zbroj dva elementa trokuta koji se nalaze neposredno iznad njega. Konačno, treće svojstvo kaže da je Pascalov trokut simetričan s lijeva na desno. Sada lako izgrađujemo Pascalov trokut sa konkretnim vrijednostima binomnih koeficijenata:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & & \\
\ldots & & & & & & & & & & & & & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Zadatak 1.61 *Odredi koeficijente u razvoju binoma* $(x + 2)^5$.

Poglavlje 2

Realne funkcije realne varijable

2.1 Definicija funkcije

Definicija 2.1 *Funkcija je uređena trojka koja se sastoji od skupa X koji se zove domena, skupa Y koji se zove kodomena, te pravila preslikavanja f koje svakom elementu domene pridružuje točno jedan element kodomene.*

Uobičajilo se funkciju zapisivati sa $f : X \to Y$, $f(x) = y$. Spomenimo još neke nazive vezane za funkciju: skup X se naziva još i *područje definicije* funkcije, skup Y se naziva *područje vrijednosti* funkcije, x se naziva *nezavisna varijabla*, y se naziva *zavisna varijabla*, a ako je $y = f(x)$, onda kažemo da je y *funkcijska vrijednost* funkcije f u točki x, ili još da je y *slika* od x, a x *praslika* od y, ili još da se x *preslikao* u y. Također, domena funkcije f se ponekad označava sa $\mathcal{D}(f)$, a kodomena sa $\mathcal{K}(f)$.

Definicija 2.2 *Neka je $f : X \to Y$ funkcija. Kažemo da je f realna funkcija realne varijable, ako vrijedi $X \subseteq \mathbb{R}$ i $Y \subseteq \mathbb{R}$.*

U daljenjem tekstu ćemo kod svakog spomena funkcije smatrati da se radi o realnoj funkciji realne varijable, osim ako nije izričito navedeno drugačije.

Definicija 2.3 *Slika funkcije $f : X \to Y$ je skup*

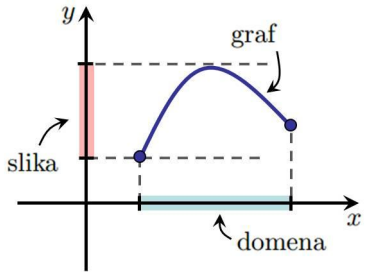
$$\mathcal{R}(f) = \{f(x) : x \in X\} \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}.$$

Dakle, neformalnije možemo reći da je slika $\mathcal{R}(f)$ funkcije f skup funkcijskih vrijednosti funkcije f. Uočimo da je slika funkcije po definiciji podskup kodomene.

Definicija 2.4 *Graf funkcije $f : X \to Y$ je skup*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

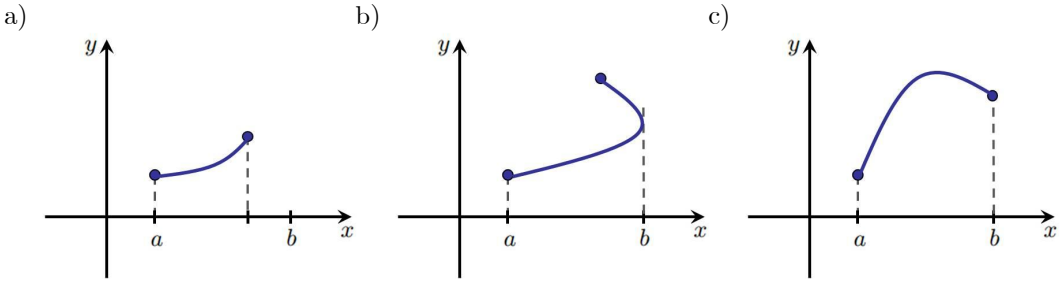
Uočimo da je, za razliku od slike funkcije koja je definirana kao skup točaka, graf funkcije definiran kao skup uređenih parova. Dakle, slika funkcije je skup realnih brojeva koji se grafički prikazuje na pravcu, dok je graf funkcije skup uređenih parova realnih brojeva koji se grafički



Slika 2.1: Domena, slika i graf funkcije.

prikazuju kao točke ravnine. Geometrijska interpretacija pojma domene, slike i grafa funkcije prikazana je na Slici 2.1.

Jako je važno uočiti da, obzirom na definiciju funkcije, ne može svaka krivulja predstavljati graf funkcije. Naime, da bi neka krivulja bila graf funkcije, potrebno je da **svaka** točka x domene ima **točno jednu** sliku $y = f(x)$ u kodomeni (vidi Sliku 2.2).



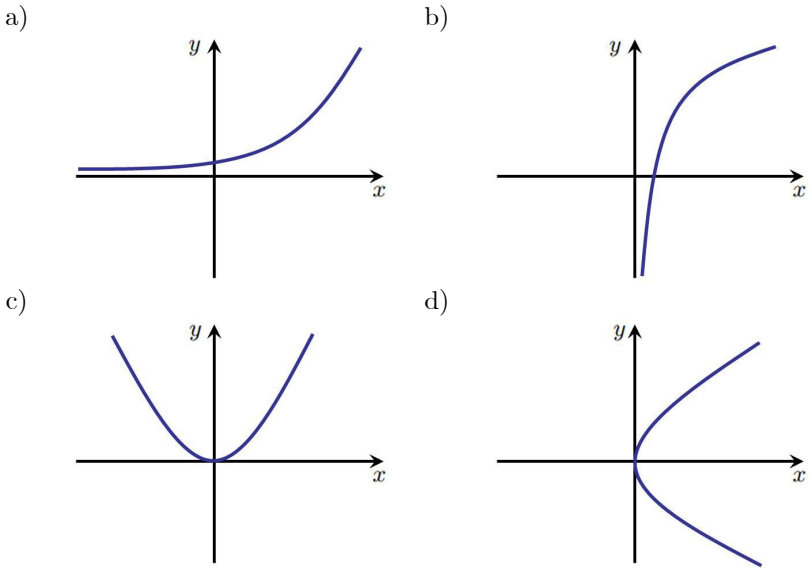
Slika 2.2: Krivulja: a) nije graf funkcije $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ jer postoje $x \in [a, b]$ koji nemaju sliku; b) nije graf funkcije $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ je postoje $x \in [a, b]$ koji imaju više od jedne slike, c) jest graf funkcije $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ jer svaki $x \in [a, b]$ ima točno jednu sliku.

Dakle, svaki graf funkcije je krivulja, no svaka krivulja nije graf funkcije. Na pitanje kako prepoznati krivulju koja predstavlja graf funkcije, odgovor nam daje sljedeća napomena.

Napomena 2.5 *Ravninska krivulja predstavlja graf funkcije ako i samo ako svaki vertikalni pravac siječe krivulju u najviše jednoj točki.*

Ako krivulja predstavlja graf funkcije, onda je domena funkcije projekcija krivulje na os x, dok je slika funkcije projekcija krivulje na os y (vidi Sliku 2.3). Sada želimo formalno definirati pojmove jednakosti i kompozicije funkcija.

Zadatak 2.6 *Skiciraj graf neke funkcije f koja ima: a) domenu $\mathcal{D}(f) = \langle -1, +\infty \rangle$ i sliku $\mathcal{R}(f) = \langle -\infty, 2 \rangle$; b) domenu $\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, 3 \rangle$ i sliku $\mathcal{R}(f) = [1, +\infty \rangle$.*



Slika 2.3: Krivulja: a) predstavlja graf funkcije f sa domenom $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ i slikom $\mathcal{R}(f) = \langle 0, +\infty \rangle$, b) predstavlja graf funkcije f sa domenom $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty \rangle$ i slikom $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$, c) predstavlja graf funkcije f sa domenom $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ i slikom $\mathcal{R}(f) = [0, +\infty \rangle$, d) ne predstavlja graf funkcije.

Zadatak 2.7 *Skiciraj graf neke funkcije f za koju je: a) $\mathcal{D}(f) = [-1, 3\rangle$ i $f(1) = 3$; b) $\mathcal{D}(f) = [0, +\infty \rangle$, $f(0) = 2$ i $f(2) = 0$.*

Neka je f funkcija s domenom $\mathcal{D}(f)$. Kažemo da je $x \in \mathcal{D}(f)$ nultočka funkcije f ako je $f(x) = 0$. Kažemo da je f pozitivna na skupu $X \subseteq \mathcal{D}(f)$ ako je $f(x) > 0$ za svaki $x \in X$, a kažemo da je f negativna na skupu $X \subseteq \mathcal{D}(f)$ ako je $f(x) < 0$ za svaki $x \in X$.

Zadatak 2.8 *Skiciraj graf neke funkcije koja: a) ima nultočke $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$, b) ima nultočku $x_1 = 3$, c) nema nultočaka.*

Zadatak 2.9 *Skiciraj graf neke funkcije koja je: a) pozitivna na $\langle 0, 2\rangle$, a negativna na $\langle 2, +\infty\rangle$; b) pozitivna na $\langle -1, 3\rangle$, a negativna na $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$.*

Zadatak 2.10 *Skiciraj graf neke funkcije f za koju jednadžba $f(x) = 2$: a) ima dva rješenja; b) ima samo jedno rješenje; c) nema rješenja. Rješenja jednadžbe naznači na skici.*

Definicija 2.11 *Dvije funkcije su jednake ako im je jednaka domena, kodomena i pravilo preslikavanja.*

Definicija 2.12 *Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ dvije funkcije. Funkcija $g \circ f : X \to Z$ definirana pravilom $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ naziva se* kompozicija *funkcija f i g.*

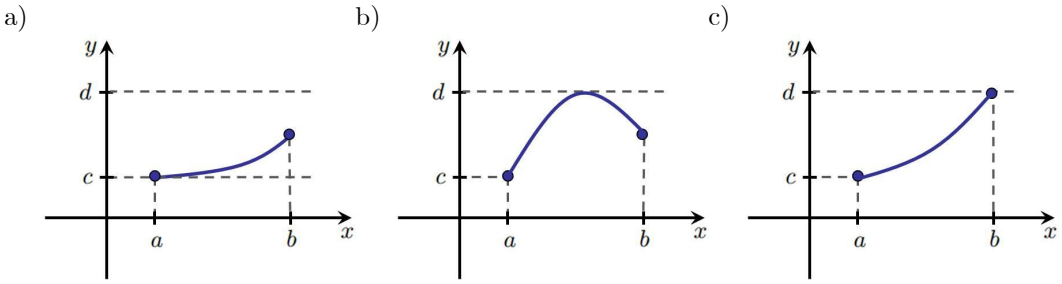
Uočimo da je općenito $g \circ f \neq f \circ g$. Naime, kompozicija najčešće nije definirana u oba poretka, a i kad jest definirana najčešće je različita.

Često nam je jako važno znati kako poništiti djelovanje funkcije f na elementu x, tj. za zadanu sliku $f(x) \in \mathcal{R}(f)$ pronaći prasliku $x \in \mathcal{D}(f)$.

Definicija 2.13 *Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je:*

1. injekcija *ako za svaki x_1,$x_2 \in X$ vrijedi: ako je $x_1 \neq x_2$ onda je i $f(x_1) \neq f(x_2)$,*
2. surjekcija *ako za svaki $y \in Y$ postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$,*
3. bijekcija *ako je f i injekcija i surjekcija.*

Pogledajmo što definicija injekcije, surjekcije i bijekcije znači grafički. Naime, da bi neka krivulja bila graf bijekcije, potrebno je da **svaka** točka y kodomene (surjektivnost) ima **točno jednu** prasliku x u domeni (injektivnost). Ovo svojstvo bijekcije ilustrirano je Slikom 2.4. Uočimo da kod funkcije koja je bijekcija slika funkcije mora biti jednaka kodomeni. Dakle, na pitanje kako prepoznati krivulju koja predstavlja graf bijekcije, odgovor nam daje sljedeća napomena.



Slika 2.4: Krivulja: a) nije graf bijekcije $f : [a, b] \to [c, d]$ jer postoje $y \in [c, d]$ koji nemaju pasliku; b) nije graf bijekcije $f : [a, b] \to [c, d]$ je postoje $y \in [c, d]$ koji imaju više od jedne praslike, c) jest graf bijekcije $f : [a, b] \to [c, d]$ jer svaki $y \in [c, d]$ ima točno jednu prasliku.

Napomena 2.14 *Ravninska krivulja predstavlja graf bijekcije ako i samo ako i svaki vertikalni i svaki horizontalni pravac siječe krivulju u najviše jednoj točki.*

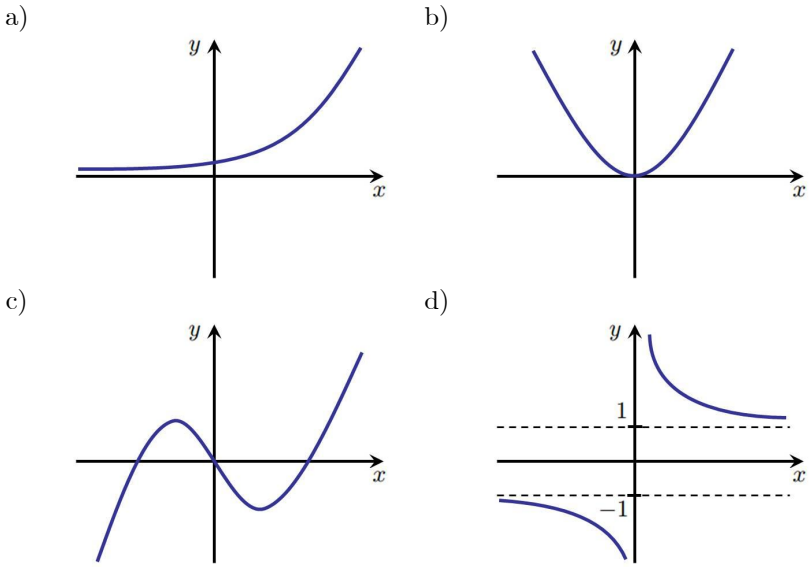
Ako krivulja predstavlja graf bijekcije, onda je domena funkcije projekcija krivulje na os x, dok je kodomena funkcije projekcija krivulje na os y (vidi Sliku 2.5).

Zadatak 2.15 *Skiciraj graf neke bijekcije koja ima: a) domenu $\langle 0, +\infty \rangle$ i kodomenu $\langle -1, 1 \rangle$; b) domenu $\langle -1, 1 \rangle$ i kodomenu $\mathbb{R}$.*

Bijekcija je važan pojam, jer se samo za funkcije koje su bijekcije može za svaki element $y = f(x)$ kodomene jednoznačno odrediti praslika x iz domene. Funkcija koja pronalazi prasliku za funkciju f nazivat će se inverznom funkcijom funkcije f. Definirajmo taj pojam formalno.

Definicija 2.16 *Neka je $f : X \to Y$ funkcija. Inverzna funkcija funkcije f je funkcija $f^{-1} : Y \to X$ sa svojstvom da je $f^{-1}(y) = x$ ako i samo ako je $f(x) = y$.*

Može se pokazati da za inverznu funkciju vrijedi sljedeće:



Slika 2.5: Krivulja: a) predstavlja graf bijekcije f sa domenom $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ i kodomenom $\mathcal{K}(f) = \langle 0, +\infty \rangle$, b) ne predstavlja graf bijekcije, c) ne predstavlja graf bijekcije, d) predstavlja graf bijekcije f sa domenom $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i kodomenom $\mathcal{K}(f) = \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$.

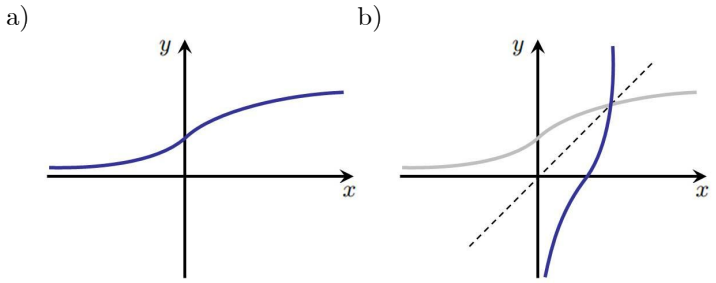
1. inverzna funkcija f^{-1} postoji ako i samo ako je funkcija f bijekcija,
2. inverzna funkcija f^{-1} je i sama bijekcija,
3. inverz funkcije f^{-1} je funkcija f,
4. djelovanje međusobno inverznih funkcija se međusobno poništava (tj. vrijedi $f^{-1}(f(x)) = x$ za svaki $x \in X$, te $f(f^{-1}(y)) = y$ za svaki $y \in Y$).

Konačno, postavlja se pitanje kakva je veza grafova funkcije f i njenog inverza f^{-1}. Uočimo sljedeće: obzirom da je $f^{-1}(y) = x$ ako i samo ako je $f(x) = y$, slijedi da je $(y, x) \in \Gamma_{f^{-1}}$ ako i samo ako je $(x, y) \in \Gamma_f$. Obzirom da su točke (x, y) i (y, x) međusobno simetrične obzirom na simetralu prvog i trećeg kvadranta, zaključujemo sljedeće.

Napomena 2.17 *Grafovi funkcije f i njoj inverzne funkcije f^{-1} su međusobno simetrični obzirom na simetralu prvog i trećeg kvadranta.*

Ova napomena ilustrirana je Slikom 2.6. Konačno, obzirom da je inverzna funkcija jako korisna, postavlja se pitanje što sa funkcijama koje nisu bijekcije i nemaju inverz. Za takve funkcije sužavanjem domene možemo postići da postanu injektivne, a sužavanjem kodomene možemo postići da postići da postanu surjektivne. Sužavanje domene ili kodomene se naziva još i restrikcija, pa definirajmo formalno taj pojam.

Definicija 2.18 *Neka su $f : X \to Y$ i $f' : X' \to Y'$ funkcije. Kažemo da je funkcija f' dobivena iz funkcije f:*

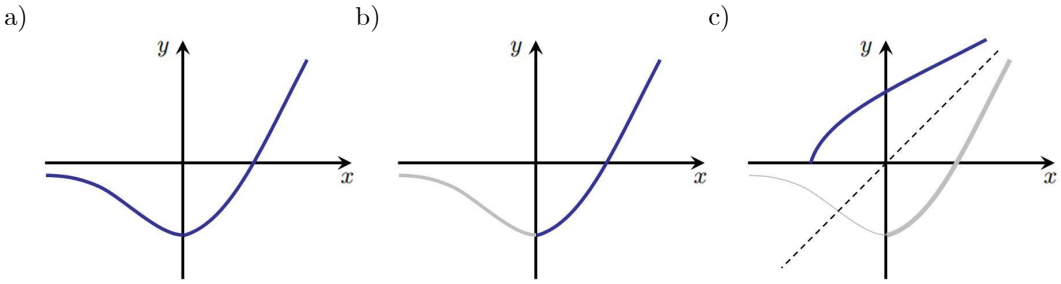


Slika 2.6: Graf: a) funkcije f koja je bijekcija, te b) njoj inverzne funkcije f^{-1}.

1. restrikcijom domene, *ako je* $X' \subset X$, $Y' = Y$, *te* $f'(x) = f(x)$ *za svaki* $x \in X'$,
2. restrikcijom kodomene, *ako je* $X' = X$, $Y' \subset Y$, *te* $f'(x) = f(x)$ *za svaki* $x \in X'$.

Funkcija dobivena restrikcijom domene ili kodomene naziva se restrikcija.

Dakle, ako funkcija nije surjekcija, onda suzimo kodomenu na sliku funkcije (ovo suženje se ne reflektira na grafu funkcije), a ako funkcija nije injekcija, onda suzimo domenu do bijekcije (ovime "brišemo" dio grafa). Time se dobiva restrikcija funkcije koja je bijekcija i ima inverz (vidi Sliku 2.7).



Slika 2.7: Graf: a) funkcije koja nije bijekcija, b) njene restrikcije do bijekcije, c) inverza restrikcije.

2.2 Zadavanje funkcija

Funkcija se može zadati na više načina: 1) tablično, 2) eksplicitno, 3) implicitno, 4) parametarski.

Tablično zadavanje funkcije

Funkcija f može se zadati tablicom

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	3	5	$\frac{17}{3}$
$f(x)$	-1	2	2	$\frac{2}{3}$	-1	-2

.

Ovakav način zadavanja funkcije može biti koristan u praksi. Naime, često se funkcijom modeliraju različite fizikalne pojave, pa se može dogoditi da je pri eksperimentalnim mjerenjima izmjerena vrijednost samo u određenom konačnom broju točaka. Tada se vrijednost funkcije u ostalim točkama interpolira glatkim krivuljama (najčešće su to polinomi).

Eksplicitno zadavanje funkcije

Eksplicitno se funkcija f zadaje analitičkim izrazom koji sadrži varijablu x, a po kojem se izračunava vrijednost $f(x)$. Primjeri za to su

$$f(x) = 2x - 1,\ f(x) = x^2,\ f(x) = \frac{x-1}{x+1},\ \ldots$$

Prirodna domena eksplicitno zadane funkcije f je najveći podskup skupa $\mathbb{R}$ za čije elemente je vrijednost analitičkog izraza $f(x)$ dobro definirana. Primjerice, za funkcije

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ i } g(x) = \sqrt{x+2}$$

vrijedi da im je prirodna domena jednaka

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\} \text{ i } \mathcal{D}(g) = [-2, +\infty\rangle\,.$$

Uobičajio se sljedeći dogovor: ako je funkcija f zadana eksplicitno analitičkim izrazom, pri čemu nije navedena domena, onda se podrazumijeva prirodna domena. Primjerice, ako su funkcije f i g zadane sa

$$f(x) = x \text{ i } g(x) = \frac{x(x-1)}{x-1}$$

one nisu međusobno jednake, jer se podrazumijeva prirodna domena za obje funkcije, a ona za ove dvije funkcije nije ista. Naime, vrijedi

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \text{ i } \mathcal{D}(g) = \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

Zadatak 2.19 *Ako je funkcija zadana eksplicitno izrazom:*

$$a)\ f(x) = \tfrac{x}{x-1}, \quad b)\ f(x) = \sqrt{2-x}, \quad c)\ f(x) = e^{x+1},$$

koliko je $f(x+3)$?

Zadatak 2.20 *Ako je funkcija zadana eksplicitno izrazom* $f(x) = x + \frac{1}{x}$*, koliko je:*

$$a)\ f(2), \quad b)\ f(\sqrt{x}), \quad c)\ f(-1)?$$

Zadatak 2.21 *Ako je funkcija zadana eksplicitno izrazom* $f(x) = x + \frac{1}{x}$*, pokaži da je* $f(\frac{1}{x}) = f(x)$.

Zadatak 2.22 *Ako je funkcija zadana eksplicitno izrazom:*

$$a)\ f(x) = \tfrac{x}{x+3}, \quad b)\ f(x) = \sqrt{x-4},$$

što je njena domena?

Zadatak 2.23 *Ako su funkcije* f *i* g *zadane eksplicitno izrazom:*

$$a)\ f(x) = 1 \text{ i } g(x) = \tfrac{x}{x}, \qquad b)\ f(x) = \sqrt{(x^2)} \text{ i } g(x) = (\sqrt{x})^2,$$
$$c)\ f(x) = \ln x^2 \text{ i } g(x) = 2\ln x, \quad d)\ f(x) = \tfrac{1}{x-2} \text{ i } g(x) = \tfrac{x-2}{(x-2)^2},$$

jesu li one jednake?

Implicitno zadavanje funkcije

Jednadžbom

$$F(x,y)=0$$

najčešće je zadana općenita krivulja u ravnini. Međutim, ako postoje skupovi $X\subseteq\mathbb{R}$ i $Y\subseteq\mathbb{R}$ sa svojstvom da za svaki $x\in X$ postoji točno jedan $y\in Y$ takav da je $F(x,y)=0$, onda je tom jednadžbom implicitno zadana funkcija $f:X\to Y$ za koju je $f(x)=y$ ako i samo ako je $F(x,y)=0$.

Zadatak 2.24 *Koliko je funkcija i kojih implicitno zadano jednadžbom:*

a) $x^2+y-1=0$, *b)* $x+y+\sin xy=0$, *c)* $x^2+y^2=1$,

d) $(x-1)^2+(y-2)^2=1$, *e)* $x=y^2$, *f)* $x=y^2-2y$?

Skiciraj grafove svih tih funkcija.

Parametarsko zadavanje funkcije

Neka su $\varphi,\psi:I\to\mathbb{R}$ funkcije definirane na intervalu $I\subseteq\mathbb{R}$. Jednadžbom

$$\begin{cases} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad \text{za } t\in I,$$

najčešće je zadana općenita krivulja u ravnini. Međutim, ako je φ injekcija, tada će ovim jednadžbama biti zadana funkcija $f:X\to Y$ (pri čemu je $X=\mathcal{R}(\varphi)$) definirana pravilom $f(x)=y$ ako i samo ako je $x=\varphi(t)$ i $y=\psi(t)$ za neki $t\in I$. Eksplicitni (implicitni) oblik funkcije dobivamo eliminacijom varijable t iz sustava jednadžbi.

Zadatak 2.25 *Odredi ekcplicitnu ili implicitnu jednadžbu za funkciju zadanu parametarski sa:*

a) $\begin{cases} x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$ *za* $t\in[0,2\pi]$, *b)* $\begin{cases} x=3\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$ *za* $t\in[0,2\pi]$,

c) $\begin{cases} x=t\\ y=t^2+1\end{cases}$ *za* $t\in\mathbb{R}$, *d)* $\begin{cases} x=\sqrt{t+1}+t\\ y=\sin t+t^2\end{cases}$ *za* $t\in[-1,+\infty\rangle$.

Skiciraj grafove svih tih funkcija.

2.3 Elementarne funkcije

2.3.1 Osnovne elementarne funkcije

Osnovne elementarne funkcije su:

- konstanta,
- opća potencija,
- eksponencijalna i logaritamska funkcija,
- trigonometrijske i ciklometrijske funkcije.

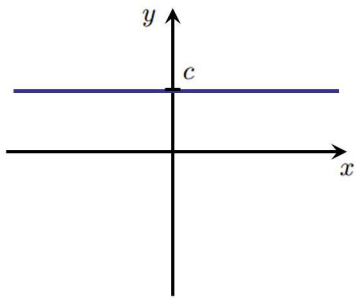
Definirajmo sada redom sve te funkcije.

Konstanta

Definicija 2.26 *Neka je $c \in \mathbb{R}$. Konstanta je funkcija*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = c.$$

Graf konstantne funkcije prikazan je na Slici 2.8.



Slika 2.8: Graf konstantne funkcije $f(x) = c$.

Opća potencija

Neka je $n \in \mathbb{N}$ prirodan broj. Za $x \in \mathbb{R}$ definiramo brojeve

$$x^n = \begin{cases} x & \text{za } n = 1 \\ x^{n-1} \cdot x & \text{za } n \geq 2 \end{cases},$$
$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

te brojeve $x^{\frac{1}{n}}$ i $x^{-\frac{1}{n}}$ sa

$$x^{\frac{1}{n}} = y \quad \Leftrightarrow \quad y^n = x,$$
$$x^{-\frac{1}{n}} = y \quad \Leftrightarrow \quad y^{-n} = x.$$

Također, definiramo $x^0 = 1$. Uočimo da brojevi x^n, x^{-n}, $x^{\frac{1}{n}}$ i $x^{-\frac{1}{n}}$ nisu dobro definirani za svaki $x \in \mathbb{R}$. Naime, broj x^{-n} nije definiran za $x = 0$, dok je u slučaju parne potencije n broj $x^{\frac{1}{n}}$ definiran samo za $x \geq 0$, a broj $x^{-\frac{1}{n}}$ samo za $x > 0$. Nadalje, da bi brojevi $x^{\frac{1}{n}}$ i $x^{-\frac{1}{n}}$ bili jednoznačno određeni, za parne potencije n se moramo ograničiti na $y \geq 0$.

Neka je $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ racionalan broj, pri čemu su m i n relativno prosti brojevi (tj. nemaju zajedničkih djelitelja osim jedinice). Za $x \in \mathbb{R}$ definiramo broj $x^{\frac{m}{n}}$ sa

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$$

uvijek kad je navedeni broj dobro definiran. Konačno, neka je $p \in \mathbb{I}$ iracionalan broj. Za $x \in \mathbb{R}$ broj x^p se može definirati kao supremum/infimum potencija racionalnim brojem, a za preciznu definiciju čitatelja upućujemo na literaturu.

Uočimo da smo ovim uveli broj x^r za svaku realnu potenciju $r \in \mathbb{R}$, a koji je dobro definiran za svaki $x > 0$, dok postojanje tog broja za $x \leq 0$ ovisi o potenciji r.

Definicija 2.27 *Neka je $n \in \mathbb{N}$ prirodni broj. Potenciranje:*

1. *brojem n je funkcija*
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^n$$

2. *brojem $-n$ je funkcija*
$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^{-n}$$

Funkcije iz prethodne definicije su bijekcije za neparne potencije n, dok za parne potencije domenu funkcije moramo restringirati da bi bile bijekcije. Naravno, u oba slučaja je kodomenu potrebno restringirati na sliku funkcije. Inverzi tih funkcija su potenciranje brojem $\frac{1}{n}$ i brojem $-\frac{1}{n}$ redom, pa definirajmo formalno te funkcije.

Definicija 2.28 *Neka je $n \in \mathbb{N}$ prirodni broj. Potenciranje:*

1. *brojem $\frac{1}{n}$ za je funkcija*
$$f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$$
pri čemu je $\mathcal{D}(f) = [0, +\infty\rangle$ za n paran, a $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ za n neparan;

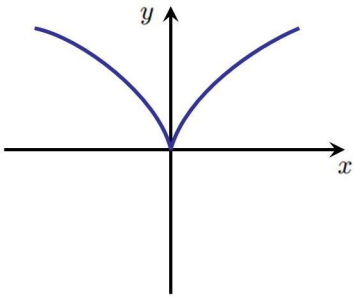
2. *brojem $-\frac{1}{n}$ je funkcija*
$$f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^{-\frac{1}{n}}$$
pri čemu je $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty\rangle$ za n paran, a $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ za n neparan.

Da bi funkcije iz prethodne definicije formalno bile bijekcije, potrebno je kodomenu restringirati na sliku funkcije. Grafovi funkcija iz prethodne dvije definicije prikazani su na Slici 2.10.

Definicija 2.29 *Neka je $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ racionalan broj, pri čemu su m i n relativno prosti brojevi. Potenciranje brojem $\frac{m}{n}$ je funkcija*
$$f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$$
pri čemu je $\mathcal{D}(f)$ prirodna domena.

Nećemo potanko analizirati kako izgleda graf potencije racionalnim brojem, samo ćemo kao primjer navesti funkciju $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ iz te klase koja je zanimljiva jer njen graf ima "špic" (vidi Sliku 2.9).

Definicija 2.30 *Neka je $p \in \mathbb{I}$ iracionalan broj. Potenciranje brojem p je funkcija*
$$f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = x^p.$$



Slika 2.9: Graf funkcije $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Neka je $a \in \langle 0, +\infty \rangle \setminus \{1\}$ realni broj. Za $x \in \mathbb{R}$ broj a^x je već definiran kao potencija, a možemo definirati i broj $\log_a x$ kao inverz sa

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

Uočimo da je broj $\log_a x$ definiran samo za $x > 0$. Broj $\log_a x$ se naziva logaritam, broj a se naziva baza logaritma, a broj x se naziva logaritmand. Iz definicije logaritma zaključujemo: logaritam je broj kojim se potencira baza da bi se dobio logaritmand. Sada možemo definirati eksponencijalnu i logaritamsku funkciju.

Definicija 2.31 *Neka je $a \in \langle 0, +\infty \rangle \setminus \{1\}$ realni broj. Eksponencijalna funkcija s bazom a je funkcija*

$$f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle,$$
$$f(x) = a^x.$$

Eksponencijalna funkcija je bijekcija, te ima inverznu funkciju. Inverz eksponencijalne funkcije naziva se logaritamska funkcija. Definirajmo formalno logaritamsku funkciju.

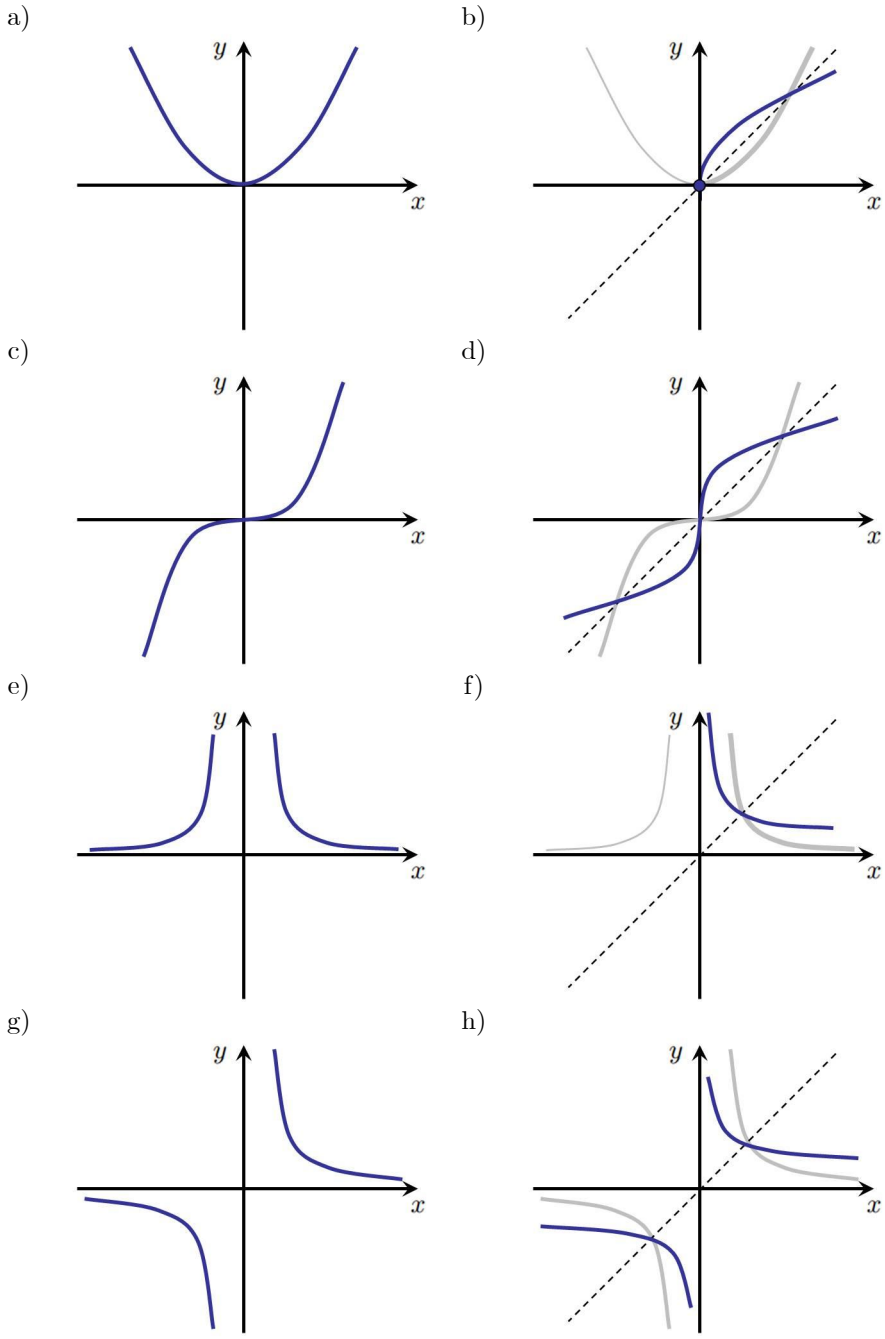
Definicija 2.32 *Neka je $a \in \langle 0, +\infty \rangle \setminus \{1\}$ realni broj. Logaritamska funkcija s bazom a je funkcija*

$$f : \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = \log_a x.$$

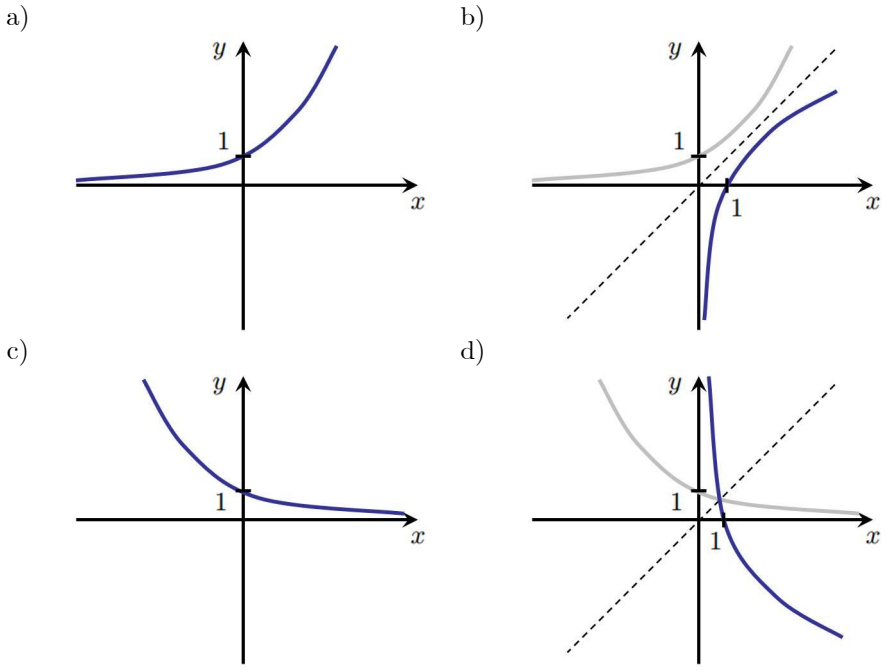
Ako je baza logaritma Eulerova konstanta e, onda pišemo $\log_e x = \ln x$. Ako je baza logaritma 10, onda pišemo $\log_{10} x = \log x$. Graf eksponencijalne i logaritamske funkcije prikazan je na Slici 2.11.

Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije

Neka je $x \in \mathbb{R}$ realni broj. Želimo definirati brojeve $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$. U tu svrhu potrebna nam je centralna kružnica radijusa jedan (koja se naziva trigonometrijska kružnica), te vertikalni brojevni pravac čije ishodište tangira trigonometrijsku kružnicu u točki $T(1, 0)$ kako je to prikazano



Slika 2.10: Graf funkcije: a) $f(x) = x^n$ za paran n; b) $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ za paran n; c) $f(x) = x^n$ za neparan n; d) $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ za neparan n; e) $f(x) = x^{-n}$ za paran n; f) $f(x) = x^{-\frac{1}{n}}$ za paran n; g) $f(x) = x^{-n}$ za neparan n; h) $f(x) = x^{-\frac{1}{n}}$ za neparan n.



Slika 2.11: Graf funkcije: a) $f(x) = a^x$ za $a \in \langle 1, +\infty \rangle$; b) $f(x) = \log_a x$ za $a \in \langle 1, +\infty \rangle$; c) $f(x) = a^x$ za $a \in \langle 0, 1 \rangle$; d) $f(x) = \log_a x$ za $a \in \langle 0, 1 \rangle$.

na Slici 2.12. Tangencijalni brojevni pravac namatamo na trigonometrijsku kružnicu, te neka se u tom namatanju točka x brojevnog pravca namota u točku T_x kružnice. Sada je broj $\cos x$ definiran kao apscisa točke T_x, dok je broj $\sin x$ definiran kao ordinata točke T_x, tj. vrijedi $T_x(\cos x, \sin x)$.

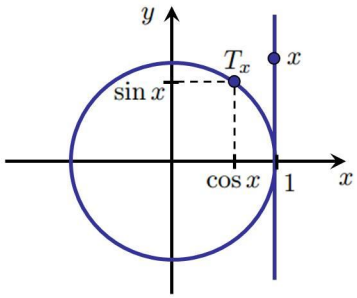
Nadalje, definiramo brojeve $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ sa

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ i } \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Uočimo da broj $\operatorname{tg} x$ nije dobro definiran za $x \in \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, dok broj $\operatorname{ctg} x$ nije dobro definiran za $x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Geometrijsko značenje brojeva $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ prikazano je na Slici 2.13, a slijedi iz sličnosti trokutova. Konačno, sada možemo definirati i brojeve $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arcctg} x$ sa

$$\begin{aligned} \arcsin x = y &\quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x, \\ \arccos x = y &\quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x, \\ \operatorname{arctg} x = y &\quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} y = x, \\ \operatorname{arcctg} x = y &\quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{ctg} y = x. \end{aligned}$$

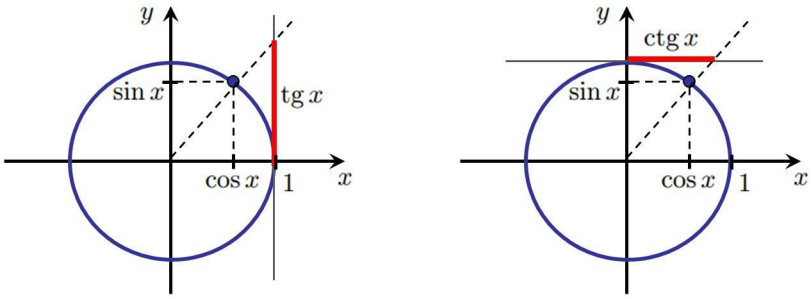
Uočimo da su brojevi $\arcsin x$ i $\arccos x$ dobro definirani samo za $x \in [-1, 1]$. Također, da bi ovi brojevi bili jednoznačno definirani, kod $\arcsin x$ moramo ograničiti na $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, kod $\arccos x$ na $y \in [0, \pi]$, kod $\operatorname{arctg} x$ na $y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, a kod $\operatorname{arcctg} x$ na $y \in \langle 0, \pi \rangle$. Sada možemo definirati



Slika 2.12: Namatanje brojevnog pravca na trigonometrijsku kružnicu, te definicija brojeva $\sin x$ i $\cos x$.

trigonometrijske i ciklometrijske funkcije, koje realnim brojevima x pridružuju brojeve koje smo upravo definirali.

a) b)



Slika 2.13: Geometrijsko značenje brojeva $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$.

Definicija 2.33 Trigonometrijske funkcije *su:*

1. *funkcija* sinus *definirana sa*
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = \sin x;$$

2. *funkcija* kosinus *definirana sa*
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = \cos x;$$

3. *funkcija* tangens *definirana sa*
$$f : \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = \operatorname{tg} x;$$

4. *funkcija* kotangens *definirana sa*

$$f : \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = \operatorname{ctg} x.$$

Nijedna trigonometrijska funkcija nije bijekcija na cijelom području definicije, ali ako se napravi restrikcija, onda postoji inverzna funkcija. Inverzne funkcije (restringiranih) trigonometrijskih funkcija nazivaju se ciklometrijske funkcije.

Definicija 2.34 Ciklometrijske funkcije *su:*

1. *funkcija* arkus sinus *definirana sa*

$$f : [-1, 1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right],$$
$$f(x) = \arcsin x;$$

2. *funkcija* arkus kosinus *definirana sa*

$$f : [-1, 1] \to [0, \pi],$$
$$f(x) = \arccos x;$$

3. *funkcija* arkus tangens *definirana sa*

$$f : \mathbb{R} \to \left\langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \right\rangle,$$
$$f(x) = \operatorname{arctg} x;$$

4. *funkcija* arkus kotangens *definirana sa*

$$f : \mathbb{R} \to \langle 0, \pi \rangle,$$
$$f(x) = \operatorname{arcctg} x.$$

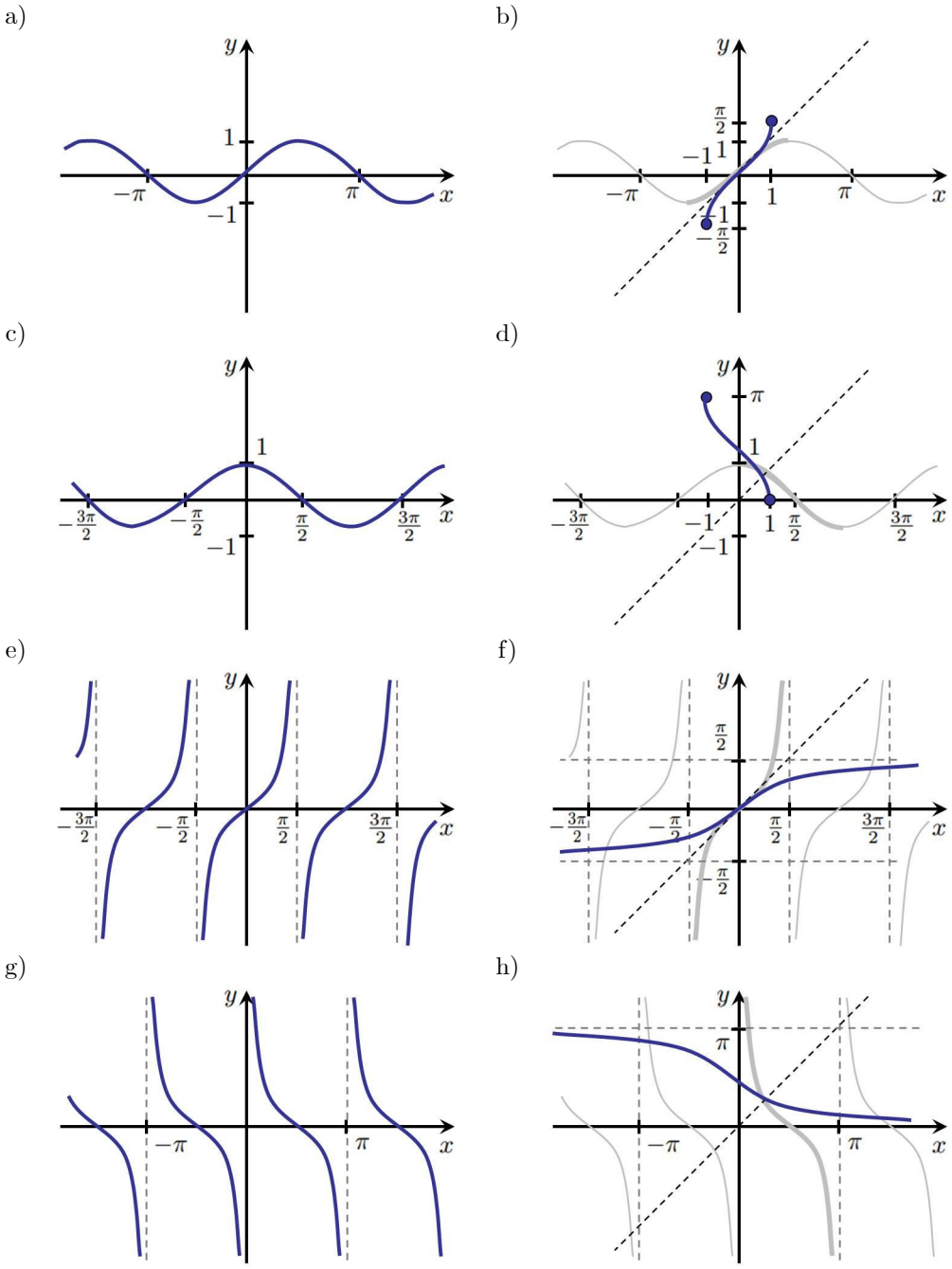
Grafovi trigonometrijskih i ciklometrijskih funkcija prikazani su na Slici 2.14.

2.3.2 Računske operacije s funkcijama

Sada želimo uvesti definiciju pet računskih operacija s funkcijama, pomoću kojih se iz dvije zadane funkcije dobiva nova funkcija. Tih pet operacija su zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i kompozicija funkcija.

Definicija 2.35 *Neka su f i g dvije funkcije. Funkcije $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ i $\frac{f}{g}$ definiramo sljedećim pravilom:*

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$;
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;
4. $(\dfrac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.



Slika 2.14: Graf funkcije: a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = \arcsin x$; c) $f(x) = \cos x$; d) $f(x) = \arccos x$; e) $f(x) = \operatorname{tg} x$; f) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; g) $f(x) = \operatorname{ctg} x$; h) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

Kompoziciju funkcija smo već definirali, no podsjetimo se na defincijju.

Definicija 2.36 *Neka su f i g dvije funkcije. Kompozicija $g \circ f$ funkcija f i g definirana je pravilom $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Primjerice, ako su zadane funkcije $f(x) = x + 1$, $g(x) = \sin x$ i $h(x) = \frac{1}{x}$, onda vrijedi

$$\begin{aligned}(f + g \circ h)(x) &= f(x) + g(h(x)) = x + 1 + \sin\frac{1}{x},\\ (\frac{f}{g} - f \cdot h)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} - f(x) \cdot h(x) = \frac{x+1}{\sin x} - \frac{x+1}{x},\\ (f \circ (g \cdot h))(x) &= f(g(x) \cdot h(x)) = \frac{\sin x}{x} + 1.\end{aligned}$$

2.3.3 (Složene) elementarne funkcije

Obzirom da smo uveli nekoliko osnovnih elementarnih funkcija, te pet računskih operacija s funkcijama, sada možemo iz tog relativno malog temelja graditi cijelo mnoštvo različitih funkcija koje ćemo nazivati složenim elementarnim funkcijama.

Definicija 2.37 *Složene elementarne funkcije su sve funkcije koje nastaju iz osnovnih elementarnih funkcija primjenom konačno mnogo puta pet računskih operacija s funkcijama (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i kompozicija funkcija).*

Definicija 2.38 *Elementarne funkcije su sve osnovne i sve složene elementarne funkcije.*

Primjerice, elementarne funkcije su

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sin x},\ g(x) = \frac{1}{x+2} + \ln(x^2 - 1),\ h(x) = x + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x+1}},$$

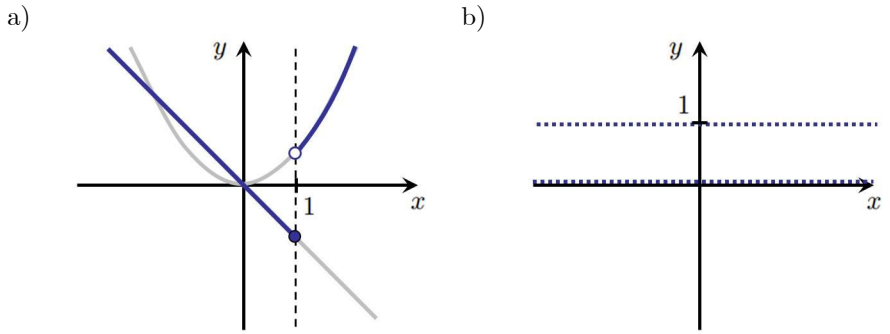
te skoro sve druge funkcije kojima se čovjek na brzinu može domisliti. Razlog tome je što veliku većinu vremena koristimo upravo elementarne funkcije, iako je klasa elementarnih funkcija tek mali dio "svijeta" svih funkcija koji je puno širi. Elementarne funkcije se tako često koriste, da je zapravo teško domisliti se primjeru funkcije koja nije elementarna. Primjerice, funkcije $f(x) = |x|$ i $g(x) = x^x$ koje ne djeluju kao elementarne su ipak elementarne, jer vrijedi

$$f(x) = |x| = \sqrt{(x^2)} \text{ i } g(x) = x^x = e^{x \ln x}$$

pa vidimo da i one nastaju iz osnovnih elementarnih funkcija primjenom pet računskih operacija s funkcijama. Kako onda uopće izgleda neka funkcija koja nije elementarna? Primjeri funkcija koje nisu elementarne su

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{za } x \le 1 \\ x^2 & \text{za } x > 1 \end{cases} \text{ i } g(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{za } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

čiji grafovi su prikazani na Slici 2.15.



Slika 2.15: Grafovi funkcija koje nisu elementarne.

2.3.4 Neke klase složenih elementarnih funkcija

Neke često korištene klase složenih elementarnih funkcija su:

- polinomi,
- racionalne funkcije,
- hiperbolne i area funkcije.

Definirajmo sada redom sve te funkcije.

Polinomi

Definicija 2.39 *Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Polinom stupnja n je svaka funkcija*

$$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

pri čemu su $a_i \in \mathbb{R}$ realni koeficijenti, te $a_n \neq 0$.

Neformalnije rečeno, polinom je linearna kombinacija općih potencija x^n za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. U polinomu stupnja n koeficijent a_n se naziva vodeći koeficijent, a a_0 se naziva slobodni član. Primjeri polinoma su

$$\begin{array}{ll} p(x) = x^3 - 3x + 2 & \text{- polinom stupnja 3,} \\ p(x) = 3x - 2 & \text{- polinom stupnja 1,} \\ p(x) = x^{14} + 10x^{10} + 27x^3 & \text{- polinom stupnja 14,} \\ p(x) = 5 & \text{- polinom stupnja 0.} \end{array}$$

Uočimo, dakle, da se i konstantna funkcija može smatrati polinomom i to polinomom stupnja nula. Nadalje, prema osnovnom teoremu algebre svaki polinom stupnja $n \geq 1$ ima točno n nultočaka $x_1, \ldots, x_n$ koje mogu biti:

- realne i kompleksne (kompleksne dolaze u kompleksno konjugiranom paru),
- jednostruke i višestruke,

pa se polinom stupnja n može faktorizirati sa

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\ &= a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n). \end{aligned}$$

Faktori koji odgovaraju višestrukoj nultočki se često zapišu kao jedan faktor pod potencijom, a faktori koji odgovaraju paru kompleksno konjugiranih nultočaka se međusobno pomnože da se izbjegnu kompleksni brojevi. Primjerice, vrijedi

$$\begin{aligned} p(x) &= x^8 - 2x^4 + 1 = \\ &= (x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2 = \\ &= (x-1)(x-1)(x+1)(x+1)(x-i)(x+i)(x-i)(x+i), \end{aligned}$$

pa vidimo da ovaj polinom stupnja 8 ima točno 8 nultočaka, te se faktorizira sa 8 faktora, ali češće se koristi zapis sa tri faktora pod potencijama.

Zadatak 2.40 *Koja od sljedećih funkcija je polinom i kojeg stupnja:*

a) $p(x) = x^2 + 2x - 3$, *b)* $p(x) = \frac{5}{x^2+1}$, *c)* $p(x) = 7$,
d) $p(x) = x^2 + \sin x$, *e)* $p(x) = 3x^3 - 2x^2$, *f)* $p(x) = x^{14} + x^{-1}$.

Zadatak 2.41 *Koliko nultočaka ima polinom:*

a) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, *b)* $p(x) = x^4 - x + 1$, *c)* $p(x) = x^5 + x^3 - 2$.

Mogu li sve nultočke tog polinoma biti kompleksne?

Racionalne funkcije

Definicija 2.42 *Racionalna funkcija je svaka funkcija oblika*

$$\begin{aligned} &r : \mathcal{D}(r) \to \mathbb{R}, \\ &r(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)}, \end{aligned}$$

pri čemu je $p_m(x)$ *polinom stupnja* m, $q_n(x)$ *polinom stupnja* n, *a* $\mathcal{D}(r) = \mathbb{R}\backslash\{x : q_n(x) = 0\}$.

Neformalnije rečeno, racionalna funkcija je razlomak polinoma. Primjeri racionalnih funkcija su

$$r(x) = \frac{x}{x^2-4},\ r(x) = \frac{x^3}{2x^2-3},\ r(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}.$$

Definicija 2.43 *Racionalna funkcija je:*

- *prava, ako je stupanj polinoma u brojniku manji od stupnja polinoma u nazivniku,*
- *neprava, ako je stupanj polinoma u brojniku veći ili jednak od stupnja polinoma u nazivniku.*

Primjeri pravih racionalnih funkcija su

$$r(x) = \frac{x}{x^3 - 1},\ r(x) = \frac{2}{x^2 + 4x + 4},$$

dok su sljedeće racionalne funkcije primjeri nepravih racionalnih funkcija

$$r(x) = \frac{x^3 + 3}{2 - x},\ r(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{1 - x^2}.$$

Teorem 2.44 *Svaka neprava racionalna funkcija može se prikazati kao zbroj polinoma i prave racionalne funkcije.*

Postupak kojim se neprava racionalna funkcija rastavlja na zbroj polinoma i prave racionalne funkcije je dijeljenje polinoma. Primjerice, dijeljenjem polinoma u brojniku i nazivniku dobivamo sljedeće

$$\underbrace{\frac{3x^3 + 7x^2 - 5x}{x^2 + 3x + 1}}_{\text{neprava racionalna f-ja}} = \underbrace{3x - 2}_{\text{polinom}} + \underbrace{\frac{-2x + 2}{x^2 + 3x + 1}}_{\text{prava racionalna f-ja}}.$$

Prava racionalna funkcija se dalje može rastaviti na zbroj jednostavnijih razlomaka postupkom koji se zove rastav na parcijalne razlomke. Postupak rastava prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke provodi se na sljedeći način:

1. faktorizira se polinom u nazivniku racionalne funkcije,
2. faktoru oblika $(x - a)^n$ odgovara zbroj parcijalnih razlomaka
$$\frac{A_1}{(x - a)} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x - a)^n},$$
3. faktoru oblika $(x^2 + bx + c)^n$ odgovara zbroj parcijalnih razlomaka
$$\frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + bx + c)} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + bx + c)^n},$$

a onda je racionalna funkcija jednaka zbroju svih parcijalnih razlomaka za sve faktore nazivnika. Nepoznati koeficijenti A_i, B_i i C_i se određuju metodom nepoznatih koeficijenata. Primjerice, vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{(x-1)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3},\\
\frac{x^2 - 3}{(x^2 + x + 1)^2} &= \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + x + 1)^2},\\
\frac{3x + 12}{(x+1)(x-2)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2},\\
\frac{9x^2 + 18}{(x^2+1)^2(x^2+4)} &= \frac{Ax + B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx + D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + 4},\\
\frac{2x^2 - 8}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Koeficijente A, B, C, D, E i F bi dalje trebalo odrediti metodom nepoznatih koeficijenata, što ostavljamo čitatelju za vježbu.

Zadatak 2.45 *Koja od sljedećih funkcija je racionalna:*

$$\begin{array}{lll} a)\ r(x)=\frac{\ln x}{1+x}, & b)\ r(x)=\frac{5}{x^2+1}, & c)\ r(x)=\frac{x^2+x}{5-x}, \\ d)\ r(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2+x+7}, & e)\ r(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}+1}, & f)\ r(x)=\frac{x}{x-2}. \end{array}$$

Zadatak 2.46 *Koja od sljedećih racionalnih funkcija je prava, a koja neprava:*

$$\begin{array}{lll} a)\ r(x)=\frac{x^2+2}{x+2}, & b)\ r(x)=\frac{5}{x^2+1}, & c)\ r(x)=\frac{x^2+x}{5-x}, \\ d)\ r(x)=\frac{x^3-x^2}{x^3+x+7}, & e)\ r(x)=\frac{x+1}{x^3+2x^2-5x+1}, & f)\ r(x)=\frac{x}{x-2}. \end{array}$$

Zadatak 2.47 *Postavi formulu za rastav na parcijalne razlomke prave racionalne funkcije:*

$$\begin{array}{ll} a)\ r(x)=\frac{2x-1}{(x+1)^2}, & b)\ r(x)=\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x^2+1)}, \\ c)\ r(x)=\frac{3x^2}{(x^2+4)^2}, & d)\ r(x)=\frac{2x^3-x^2}{(x-2)^2(x^2+2)}. \end{array}$$

Hiperbolne i area funkcije

Za broj $x \in \mathbb{R}$ definiramo brojeve

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},\ \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Uočimo da su ovi brojevi dobro definirani realni brojevi za svaki $x \in \mathbb{R}$, jedino $\operatorname{cth} x$ nije dobro definiran za $x = 0$. Imajući to u vidu, možemo definirati hiperbolne funkcije.

Definicija 2.48 Hiperbolne funkcije *su:*

1. *funkcija* sinus hiperbolni *definirana sa*

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ f(x) = \operatorname{sh} x; \end{array}$$

2. *funkcija* kosinus hiperbolni *definirana sa*

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to [1, +\infty\rangle, \\ f(x) = \operatorname{ch} x; \end{array}$$

3. *funkcija* tangens hiperbolni *definirana sa*

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to [-1, 1], \\ f(x) = \operatorname{th} x; \end{array}$$

4. *funkcija* kotangens hiperbolni *definirana sa*

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle, \\ f(x) = \operatorname{cth} x. \end{array}$$

Hiperbolne funkcije su korisne jer se rješenja mnogih fizikalnih problema izražavaju pomoću njih. Kao i uvijek, želimo pronaći inverze definiranih funkcija. Definiramo brojeve

$$\begin{aligned} \operatorname{arsh} x = y &\Leftrightarrow \operatorname{sh} y = x, \\ \operatorname{arch} x = y &\Leftrightarrow \operatorname{ch} y = x, \\ \operatorname{arth} x = y &\Leftrightarrow \operatorname{th} y = x, \\ \operatorname{arcth} x = y &\Leftrightarrow \operatorname{cth} y = x. \end{aligned}$$

Obzirom na definiciju hiperbolnih funkcija, lako se pokaže da vrijedi

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}),\ \operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}.$$

Sada možemo definirati inverzne funkcije hiperbolnih funkcija koje se nazivaju area funkcije.

Definicija 2.49 Area funkcije *su:*

1. *funkcija* area sinus hiperbolni *definirana sa*

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ &f(x) = \operatorname{arsh} x; \end{aligned}$$

2. *funkcija* area kosinus hiperbolni *definirana sa*

$$\begin{aligned} &f : [1, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle, \\ &f(x) = \operatorname{arch} x; \end{aligned}$$

3. *funkcija* area tangens hiperbolni *definirana sa*

$$\begin{aligned} &f : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}, \\ &f(x) = \operatorname{arth} x; \end{aligned}$$

4. *funkcija* area kotangens hiperbolni *definirana sa*

$$\begin{aligned} &f : \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle \to \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ &f(x) = \operatorname{arcth} x. \end{aligned}$$

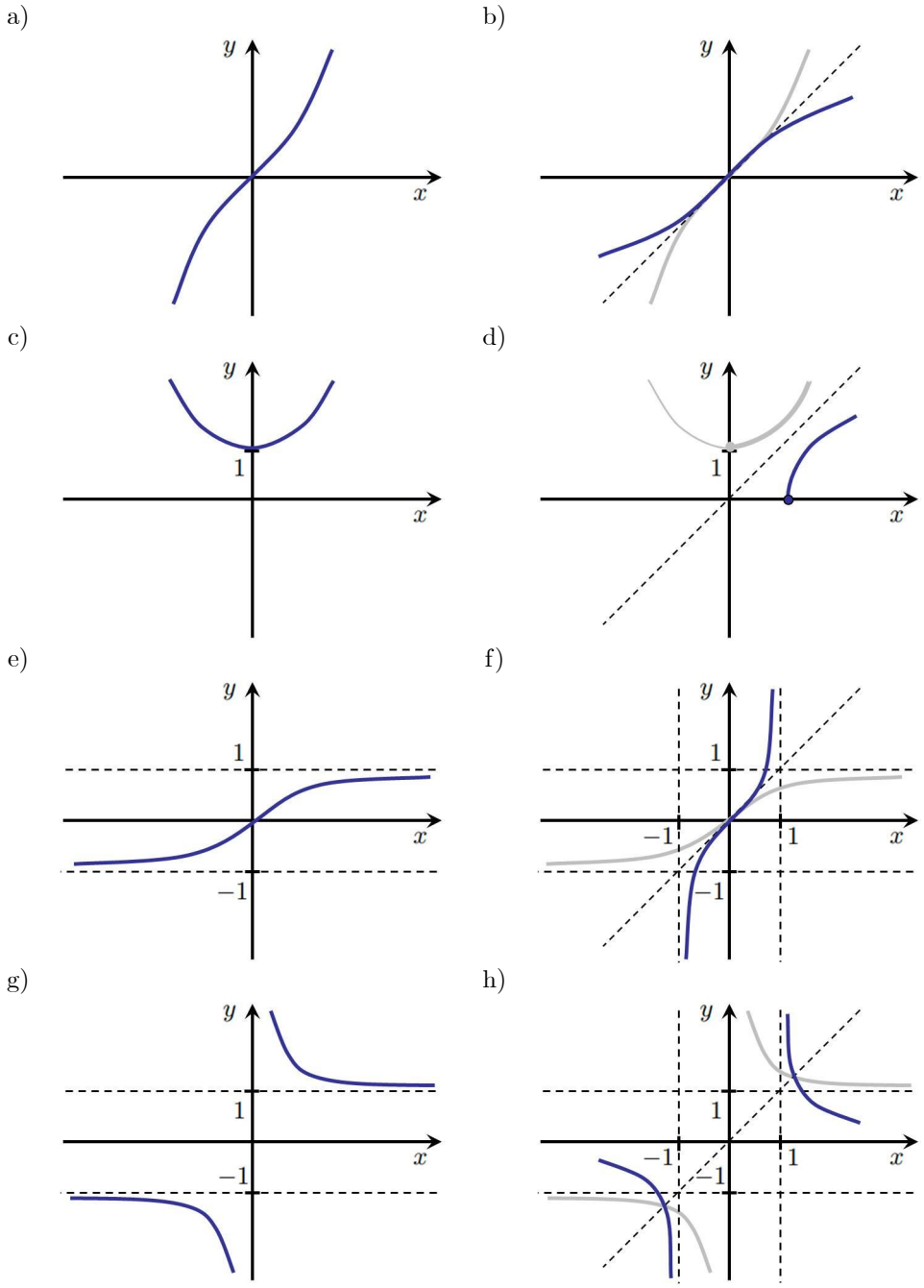
Grafovi hiperbolnih i area funkcija prikazani su na Slici 2.16.

2.4 Svojstva funkcija

2.4.1 Omeđenost

Definicija 2.50 *Neka je $f : X \to Y$ funkcija. Kažemo da je funkcija f :*

1. *omeđena odozgor, ako postoji broj $M \in \mathbb{R}$ sa svojstvom $f(x) \leq M$ za svaki $x \in X$;*
2. *omeđena odozdol, ako postoji broj $m \in \mathbb{R}$ sa svojstvom $f(x) \geq m$ za svaki $x \in X$;*



Slika 2.16: Graf funkcije: a) $f(x) = \operatorname{sh} x$; b) $f(x) = \operatorname{arsh} x$; c) $f(x) = \operatorname{ch} x$; d) $f(x) = \operatorname{arch} x$; e) $f(x) = \operatorname{th} x$; f) $f(x) = \operatorname{arcth} x$; g) $f(x) = \operatorname{cth} x$; h) $f(x) = \operatorname{arcth} x$.

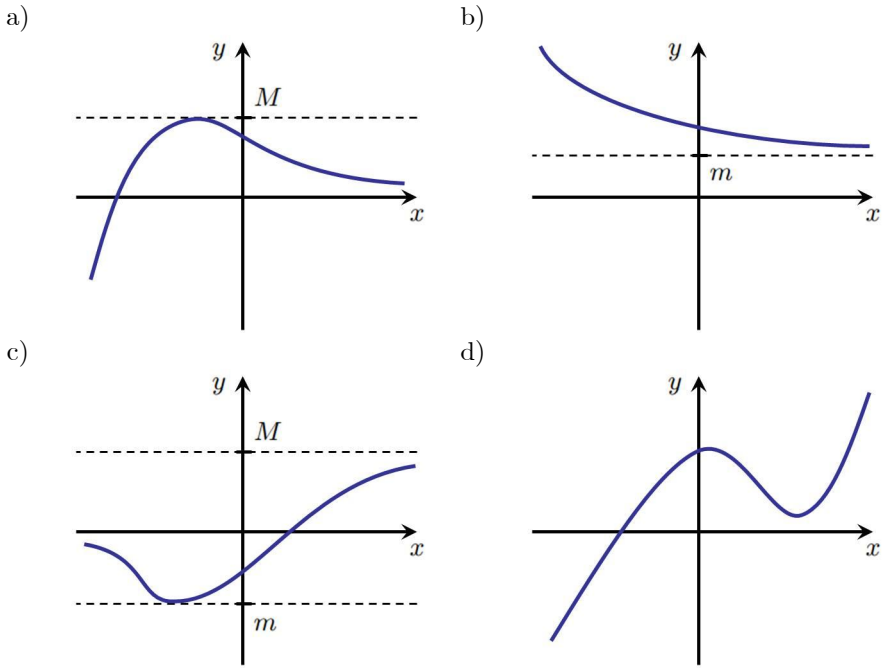
3. omeđena, ako je omeđena i odozgor i odozdol.

Pri tome se broj M naziva gornja međa, a broj m donja međa funkcije.

Uočimo da omeđenost funkcije zapravo znači omeđenost skupa funkcijskih vrijednosti, tj. slike funkcije. Geometrijski interpretirano, funkcija je:

1. omeđena odozgor, ako se cijeli graf nalazi ispod nekog horizontalnog pravca (pravac $y = M$),
2. omeđena odozdol, ako se cijeli graf nalazi iznad nekog horizontalnog pravca (pravac $y = m$),
3. omeđena, ako se cijeli graf nalazi između dvaju horizontalnih pravaca (pravci $y = m$ i $y = M$).

Pojam omeđenosti funkcije ilustriran je Slikom 2.17.



Slika 2.17: Graf funkcije: a) omeđene samo odozgor, b) omeđene samo odozdol, c) omeđene, e) neomeđene.

Zadatak 2.51 *Nabroji sve osnovne elementarne funkcije koje su: a) omeđene samo odozgor, b) omeđene samo odozdol, c) omeđene.*

2.4.2 (Ne)parnost

Definicija 2.52 *Neka je $f : X \to Y$ funkcija. Kažemo da je funkcija f :*

1. *parna, ako vrijedi* $f(-x) = f(x)$ *za svaki* $x \in X$;

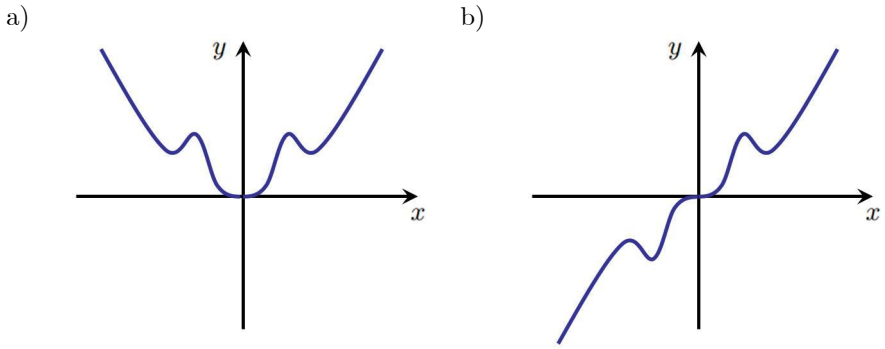
2. *neparna, ako vrijedi* $f(-x) = -f(x)$ *za svaki* $x \in X$.

Uočimo sljedeće: da bi funkcija f mogla biti parna ili neparna, domena X funkcije mora biti simetrična obzirom na ishodište. Također, funkcije najčešće nisu ni parne ni neparne. Geometrijski interpretirano, funkcija je:

1. parna, ako je graf funkcije simetričan obzirom na os y;

2. neparna, ako je graf funkcije centralno simetričan obzirom na ishodište.

Pojam (ne)parnosti funkcije ilustriran je Slikom 2.18. Inače, naziv "(ne)parnost" potječe od toga što je funkcija $f(x) = x^n$ parna za parne n, a neparna za neparne n.



Slika 2.18: Graf: a) parne funkcije, b) neparne funkcije.

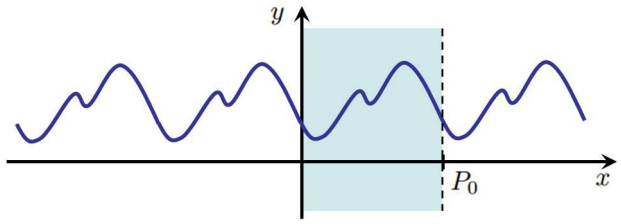
Zadatak 2.53 *Nabroji sve osnovne elementarne funkcije koje su: a) parne, b) neparne.*

2.4.3 Periodičnost

Definicija 2.54 *Neka je* $f : X \to Y$ *funkcija. Kažemo da je funkcija* f *periodična, ako postoji broj* $P \in \mathbb{R}$ *sa svojstvom da je* $f(x+P) = f(x)$ *za svaki* $x \in X$. *Broj* P *se tada naziva periodom funkcije* f.

Uočimo sljedeće: da bi funkcija f mogla biti periodična, domena X funkcije mora biti periodična. Najmanji period periodične funkcije naziva se osnovni period i označava sa P_0. Pojam periodičnosti funkcije ilustriran je Slikom 2.19.

Zadatak 2.55 *Nabroji sve osnovne elementarne funkcije koje su periodične i navedi im osnovni period.*



Slika 2.19: Graf periodične funkcije s osnovnim periodom P_0.

2.4.4 Monotonost

Definicija 2.56 *Neka je $f : X \to Y$ funkcija, te $I \subseteq X$ otvoreni interval. Kažemo da je funkcija f na intervalu I:*

1. monotono rastuća *ako za svaki $x_1, x_2 \in I$ vrijedi*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

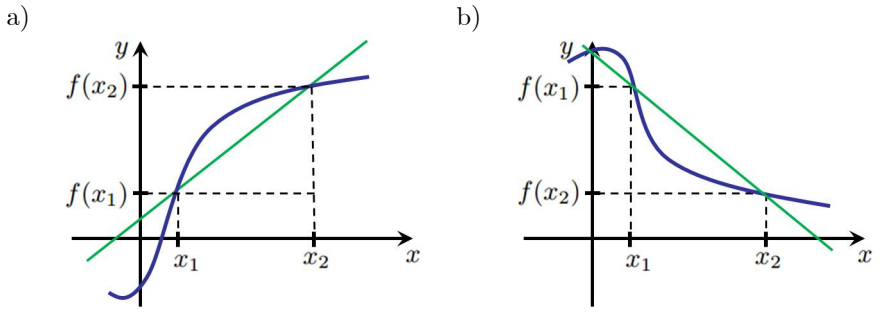
2. monotono padajuća *ako za svaki $x_1, x_2 \in I$ vrijedi*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Pojam monotonog rasta i pada ilustriran je Slikom 2.20. Uočimo da je na Slici 2.20 kroz točke $T_1(x_1, f(x_1))$ i $T_2(x_2, f(x_2))$ položena sekanta, te je položaj te sekante (rast ili pad) uvjetovan monotonošću funkcije. Geometrijski interpretirano, funkcija f na intervalu I je:

1. monotono rastuća, ako je svaka sekanta na graf na tom intervalu rastuća;

2. monotono padajuća, ako je svaka sekanta na graf na tom intervalu padajuća.

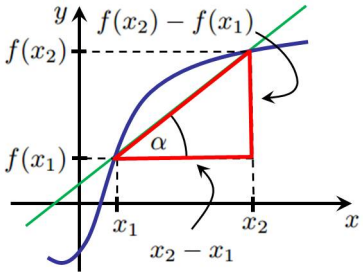


Slika 2.20: Geometrijsko značenje definicije: a) monotonog rasta, b) monotonog pada.

Štoviše, ova veza definicije monotonosti i izgleda sekante se može i precizno matematički pokazati, ako uočimo da razlomak

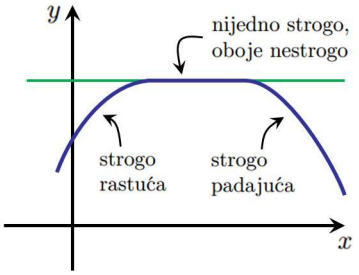
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha = k_s$$

geometrijski predstavlja koeficijent smjera k_s sekante na graf funkcije f položene kroz točke $T_1(x_1, f(x_1))$ i $T_2(x_2, f(x_2))$ (vidi Sliku 2.21). Iz definicije monotonog rasta funkcije slijedi da je taj razlomak pozitivan, pa je sekanta rastuća, a iz definicije monotonog pada slijedi da je razlomak negativan, pa je sekanta padajuća.



Slika 2.21: Razlomak $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ geometrijski znači koeficijent smjera sekante na graf kroz točke x_1 i x_2.

Konačno, ako u definiciji monotonog rasta ili pada zahtijevamo da druga nejednakost bude stroga, onda govorimo o strogom monotonom rastu ili padu (vidi Sliku 2.22).



Slika 2.22: Geometrijsko značenje (ne)stroge monotonosti.

Zadatak 2.57 *Nabroji sve osnovne elementarne funkcije koje su na cijelom području definicije: a) rastuće, b) padajuće.*

2.4.5 Zakrivljenost

Definicija 2.58 *Neka je $f : X \to Y$ funkcija, te $I \subseteq X$ otvoreni interval. Kažemo da je funkcija f na intervalu I:*

1. konveksna *ako za svaki* $x_1, x_2 \in I$ *vrijedi*

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2};$$

2. konkavna *ako za svaki* $x_1, x_2 \in I$ *vrijedi*

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Da bismo objasnili geometrijsko značenje uvjeta konveksnosti ili konkavnosti funkcije, potrebno je najprije uočiti da razlomak

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

predstavlja funkcijsku vrijednost funkcije f na polovištu intervala $[x_1, x_2]$, dok razlomak

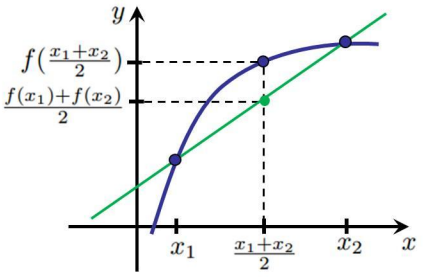
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

predstavlja vrijednost sekante na polovištu intervala $[x_1, x_2]$ (vidi Sliku 2.23). Geometrijski, definicija zakrivljenosti se sada može interpretirati na sljedeći način: funkcija f na otvorenom intervalu I je

1. konveksna, ako je odsječak svake sekante iznad grafa funkcije,

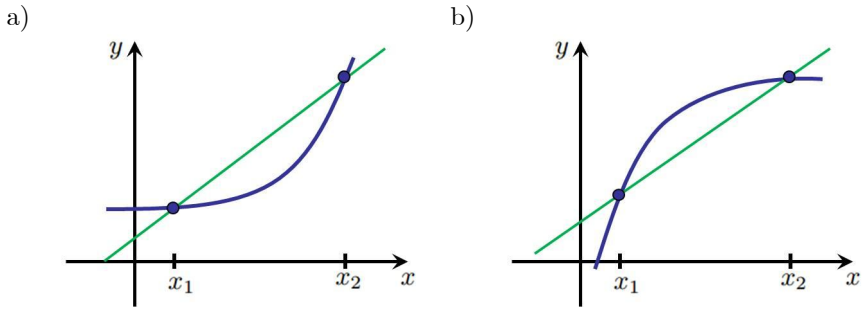
2. konkavna, ako je odsječak svake sekante ispod grafa funkcije.

Ova geometrijska interpretacija ilustrirana je Slikom 2.24. Konačno, ako u definiciji zakrivljenosti zahtijevamo da nejednakost bude stroga, onda govorimo o strogoj konveksnosti ili konkavnosti (vidi Sliku 2.25).

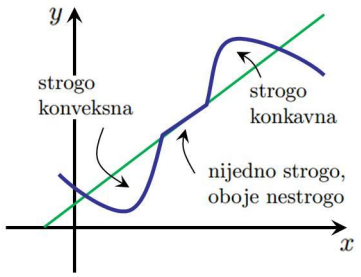


Slika 2.23: Geometrijsko značenje razlomaka $f(\frac{x_1+x_2}{2})$ i $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

Zadatak 2.59 *Nabroji sve osnovne elementarne funkcije koje su na cijelom području definicije: a) konveksne, b) konkavne.*



Slika 2.24: Geometrijsko značenje: a) konveksnosti, b) konkavnosti funkcije.



Slika 2.25: Geometrijsko značenje (ne)stroge zakrivljenosti.

2.5 Konačni i beskonačni skupovi

Definicija 2.60 *Kažemo da su skupovi X i Y* ekvipotentni*, ako postoji bijekcija $f : X \to Y$.*

Neformalno, pojam ekvipotencije sebi možemo predočiti na sljedeći način: dva skupa su ekvipotentni ako imaju jednako mnogo elemenata.

Definicija 2.61 *Kažemo da je skup X :*

1. *beskonačan, ako je ekvipotentan nekom svom pravom podskupu,*
2. *konačan, ako nije beskonačan.*

Uočimo da ovakva definicija neformalnije rečeno znači sljedeće: skup je beskonačan ako ima jednako mnogo elemenata kao neki njegov pravi podskup. Kako je to uopće moguće da neki skup ima "jednako mnogo" elemenata kao njegov **pravi** podskup? Odgovor na to je da su to fenomeni koji se događaju u beskonačnosti. Primjerice, skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ i skup parnih prirodnih brojeva $2\mathbb{N}$ koji je njegov pravi podskup, imaju jednako mnogo elemenata, jer postoji bijekcija

$$f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$$
$$f(n) = 2n$$

koju shematski možemo prikazati sa

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	...
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
$2\mathbb{N}$	2	4	6	8	10	12	...

Dakle, skup $\mathbb{N}$ je beskonačan. Sada želimo uvesti pojam prebrojivog skupa.

Definicija 2.62 *Kažemo da je skup X :*

1. *prebrojiv, ako je konačan ili ako je ekvipotentan skupu $\mathbb{N}$,*

2. *neprebrojiv, ako nije prebrojiv.*

Uočimo da je svaki konačni skup po definiciji prebrojiv. Dakle, pojam (ne)prebrojivosti je zanimljiviji za beskonačne skupove. Neformalno rečeno, beskonačan skup je:

1. prebrojiv, ako ima jednako mnogo elemenata kao skup $\mathbb{N}$,

2. neprebrojiv, ako ima neusporedivo više elemenata nego skup $\mathbb{N}$.

Motivacija za naziv "prebrojiva" beskonačnost dolazi od toga što prebrojavanje znači pridruživanje prirodnih brojeva objektima koje brojimo (prvi, drugi, treći...), pa se to matematički modelira kao funkcija sa skupa brojeva $\mathbb{N}$ u skup objekata koje brojimo X.

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...

Postavlja se pitanje mogu li se svi elementi skupa X pobrojati, tj. hoćemo li u ovom prebrojavanju elemenata skupa X iscrpiti sve elemente tog skupa. Matematički, to se svodi na pitanje je li ta funkcija bijekcija. Uočimo sljedeće:

1. skup $\mathbb{Z}$ je prebrojiv jer imamo prebrojavanje

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	...

   kojim ćemo iscrpiti sve cijele brojeve,

2. skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv jer pozitivne racionalne brojeve možemo brojiti sljedećim redom

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} \quad \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} \quad \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} \quad \cdots \\
 & \swarrow & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} \quad \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

tj. imamo prebrojavanje

$$\begin{array}{c|cccccccccc} \mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{Q}^+ & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{2} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \dots \end{array}$$

kojim ćemo iscrpiti sve pozitivne racionalne brojeve, a onda se svi racionalni brojevi pobroje tako da se na početku broji nula, a iza svakog pozitivnog razlomka se broji isti taj razlomak s negativnim predznakom (slično kao kod prebrojavanja skupa $\mathbb{Z}$).

Primjer beskonačnog skupa koji nije prebrojiv je skup $\mathbb{R}$ i svi intervali u skupu $\mathbb{R}$ (osim jednočlanog intervala $[a, a]$). Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je također neprebrojivo beskonačan. Konačno, vrijede sljedeća dva teorema.

Teorem 2.63 *Svaki:*

1. *podskup konačnog skupa je konačan,*
2. *nadskup beskonačnog skupa je beskonačan.*

Teorem 2.64 *Svaki:*

1. *podskup prebrojivog skupa je prebrojiv,*
2. *nadskup neprebrojivog skupa je neprebrojiv.*

Zadatak 2.65 *Za skup X kaži je li konačan, prebrojivo beskonačan ili neprebrojivo beskonačan, ako je:*

a) $X = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ je neparan}\}$, *b)* $X = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 7\}$,
c) $X = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 7\}$, *d)* $X = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x \leq 7\}$,
e) $X = \{1, 2, 7, 77\}$, *f)* $X = \langle 1, 3 \rangle$,
g) $X = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ je negativan}\}$, *h)* $X = \{i^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Poglavlje 3

Limes

3.1 Definicija limesa

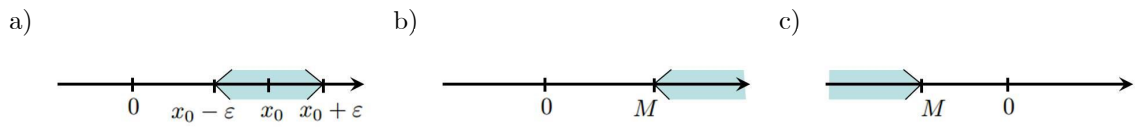
3.1.1 Okoline i gomilišta

U razmatranju brojnih pojmova vezanih uz analizu realne funkcije jedne realne varijable važan je pojam okoline točke. Pa definirajmo formalno taj pojam.

Definicija 3.1 *Okolina:*

1. *konačne točke $x_0 \in \mathbb{R}$ je svaki otvoreni interval $\langle a, b\rangle$ koji sadrži točku x_0,*
2. *pozitivne beskonačnosti $+\infty$ je svaki interval oblika $\langle M, +\infty\rangle$,*
3. *negativne beskonačnosti $-\infty$ je svaki interval oblika $\langle -\infty, M\rangle$.*

Okoline pozitivne ili negativne beskonačnosti nazivaju se još i $M-$okoline, a za konačnu točku x_0 često govorimo o $\varepsilon-$okolinama $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\rangle$. Pojam okolina ilustriran je Slikom 3.1.

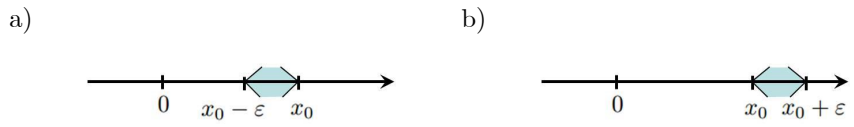


Slika 3.1: Okolina: a) konačne točke x_0, b) pozitivne beskonačnosti, c) negativne beskonačnosti.

Za konačnu točku $x_0 \in \mathbb{R}$ uvodimo još i pojmove lijeve i desne okoline.

Definicija 3.2 *Za konačnu točku $x_0 \in \mathbb{R}$ definiramo:*

1. *lijeva okolina od x_0 je svaki interval oblika $\langle x_0 - \varepsilon, x_0\rangle$,*
2. *desna okolina od x_0 je svaki interval oblika $\langle x_0, x_0 + \varepsilon\rangle$.*



Slika 3.2: Jednostrane okoline konačne točke x_0: a) lijeva okolina, b) desna okolina.

Pojam jednostranih okolina ilustriran je Slikom 3.2. Sljedeći važan pojam je gomilište skupa $X \subseteq \mathbb{R}$. Definirajmo formalno taj pojam.

Definicija 3.3 *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ skup. Kažemo da je:*

1. *konačna točka $x_0 \in \mathbb{R}$ gomilište skupa X, ako svaka okolina točke x_0 sadrži beskonačno mnogo točaka skupa X,*
2. *$+\infty$ gomilište skupa X, ako svaka okolina od $+\infty$ sadrži beskonačno mnogo točaka skupa X,*
3. *$-\infty$ gomilište skupa X, ako svaka okolina od $-\infty$ sadrži beskonačno mnogo točaka skupa X.*

Uočimo da je po definiciji gomilišta moguće da se za konačnu točku x_0 dogodi sljedeće:

- točka x_0 jest gomilište od X, a ne pripada skupu X;
- točka x_0 nije gomilište od X, a pripada skupu X (takve točke se nazivaju izolirane točke skupa X).

Primjerice, za skup $X = \{1\} \cup \langle 3, +\infty \rangle$ vrijedi da:

1. točka $x_0 = 1$ pripada skupu X, a nije gomilište (izolirana točka),
2. točka $x_0 = 3$ ne pripada skupu, a jest gomilište,
3. točka $x_0 = 2$ ne pripada skupu i nije gomilište,
4. točka $x_0 = 4$ i pripada skupu i jest gomilište,
5. negativna beskonačnost $-\infty$ nije gomilište,
6. pozitivna beskonačnost $+\infty$ jest gomilište.

Sada još želimo definirati unutarnje točke i rubove skupa, pri čemu rubovi mogu biti otvoreni i zatvoreni, te konačni i beskonačni.

Definicija 3.4 *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ skup realnih brojeva i $x_0 \in X$. Kažemo da je x_0 unutarnja točka skupa X ako postoji okolina točke x_0 sadržana u X (tj. vrijedi $x_0 \in \langle a, b \rangle \subseteq X$).*

Primjerice, jedine točke skupa $X = \langle 1, 6] \cup \{9\}$ koje nisu unutarnje su točke 6 i 9.

Definicija 3.5 *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ skup realnih brojeva, te $x_0 \in \mathbb{R}$ točka koja nije unutarnja točka skupa X. Kažemo da je konačna točka x_0 :*

1. *otvoreni rub skupa X, ako je x_0 gomilište skupa X i vrijedi $x_0 \notin X$,*
2. *zatvoreni rub skupa X, ako je x_0 gomilište skupa X i vrijedi $x_0 \in X$.*

Rubovi iz prethodne definicije nazivaju se još i konačnim rubovima skupa X. Ako je $+\infty$ (ili $-\infty$) gomilište skupa X, onda se $+\infty$ (ili $-\infty$) naziva beskonačnim rubom skupa X. Primjerice, za skup $X = \langle 2, 5] \cup \langle 7, +\infty\rangle$ vrijedi:

1. konačni otvoreni rubovi su točke 2 i 7,
2. konačni zatvoreni rub je točka 5,
3. beskonačni rub je $+\infty$ (dok $-\infty$ nije rub skupa X).

3.1.2 Limes u konačnoj točki

Definicija 3.6 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ gomilište skupa X. Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$* granična vrijednost *ili* limes *funkcije f u točki x_0 i pišemo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

ako za svaku okolinu od L postoji okolina od x_0 (bez x_0) koja se u nju preslika.

Definicija 3.7 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ gomilište skupa X. Kažemo da funkcija f ima* beskonačni limes $+\infty$ *u točki x_0 i pišemo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ako za svaku okolinu od $+\infty$ postoji okolina od x_0 (bez x_0) koja se u nju preslika.

Definicija 3.8 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ gomilište skupa X. Kažemo da funkcija f ima* beskonačni limes $-\infty$ *u točki x_0 i pišemo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

ako za svaku okolinu od $-\infty$ postoji okolina od x_0 (bez x_0) koja se u nju preslika.

Primjer funkcije koja u konačnoj točki x_0 ima konačan limes L, pozitivno beskonačan limes $+\infty$, te negativno beskonačan limes $-\infty$, prikazan je na Slici 3.3.

Nadalje, za limes funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in \mathbb{R}$ kažemo da:

1. nije definiran, ako točka x_0 nije gomilište domene X funkcije f,
2. ne postoji, točka x_0 jest gomilište domene X funkcije f, ali nije ispunjen uvjet iz definicije limesa.

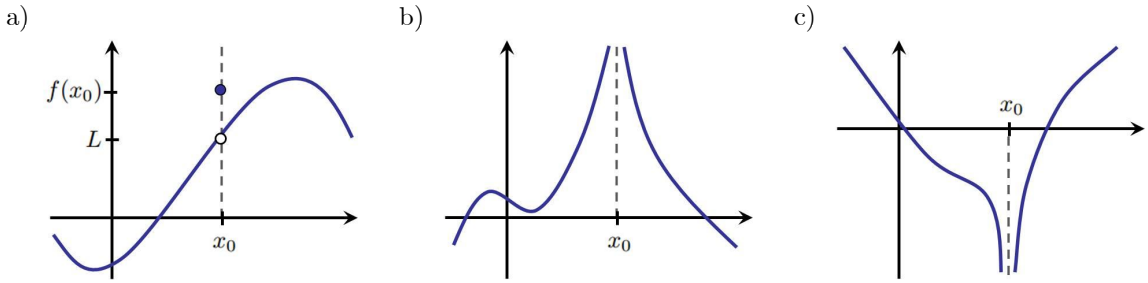
Primjer funkcije za koju limes u konačnoj točki x_0 nije definiran ili ne postoji prikazan je na Slici 3.4.

Zadatak 3.9 *Skiciraj graf neke funkcije $f(x)$ za koju vrijedi:*

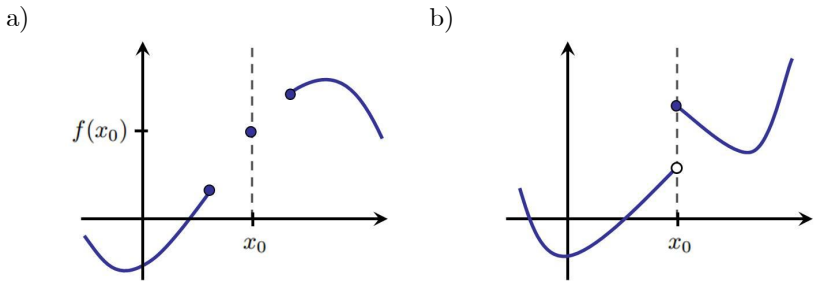
$$\lim_{x \to -2} f(x) \text{ nije definiran, } \lim_{x \to 1} f(x) = +\infty \text{ i } \lim_{x \to 4} f(x) = 2.$$

Zadatak 3.10 *Skiciraj graf neke funkcije $f(x)$ za koju vrijedi:*

$$\lim_{x \to -1} f(x) \text{ ne postoji, } \lim_{x \to 2} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to 3} f(x) = -1, \ \lim_{x \to 4} f(x) \text{ nije definiran.}$$



Slika 3.3: Funkcija u konačnoj točki x_0 ima: a) konačan limes L, b) limes $+\infty$, c) limes $-\infty$.



Slika 3.4: Limes funkcije u konačnoj točki x_0: a) nije definiran, b) ne postoji.

3.1.3 Limes u beskonačnosti

Najprije ćemo definirati limes u pozitivnoj beskonačnosti.

Definicija 3.11 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je $+\infty$ gomilište skupa X. Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$* limes u $+\infty$ *funkcije f i pišemo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

ako za svaku okolinu od L postoji okolina od $+\infty$ koja se u nju preslikala.

Definicija 3.12 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je $+\infty$ gomilište skupa X. Kažemo da je $+\infty$* limes u $+\infty$ *funkcije f i pišemo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

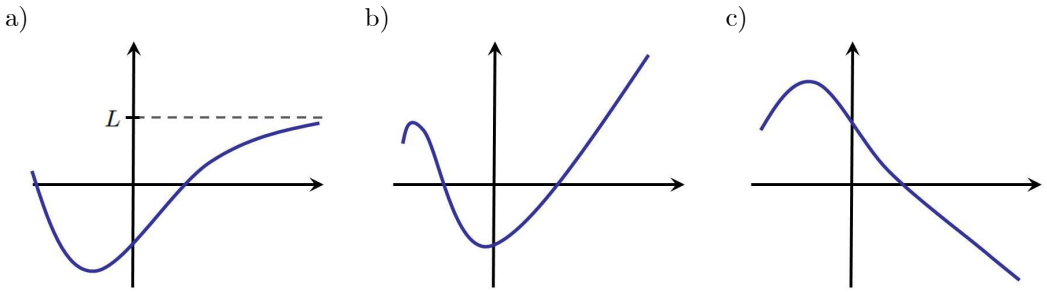
ako za svaku okolinu od $+\infty$ postoji okolina od $+\infty$ koja se u nju preslikala.

Definicija 3.13 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je $+\infty$ gomilište skupa X. Kažemo da je $-\infty$* limes u $+\infty$ *funkcije f i pišemo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

ako za svaku okolinu od $-\infty$ postoji okolina od $+\infty$ koja se u nju preslikala.

Primjer funkcije koja u pozitivnoj beskonačnosti $+\infty$ ima konačan limes L, pozitivno beskonačan limes $+\infty$, te negativno beskonačan limes $-\infty$, prikazan je na Slici 3.5.



Slika 3.5: Funkcija u pozitivnoj beskonačnosti $+\infty$ ima: a) konačan limes L, b) limes $+\infty$, c) limes $-\infty$.

Posve analogno kao kod limesa u konačnosti, za limes funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ u pozitivnoj beskonačnosti kažemo da:

1. nije definiran, ako $+\infty$ nije gomilište domene X funkcije f,
2. ne postoji, ako $+\infty$ jest gomilište domene X funkcije f, ali nije ispunjen uvjet iz definicije limesa.

Primjer funkcije za koju limes u konačnoj točki x_0 nije definiran ili ne postoji prikazan je na Slici 3.6. Uočimo da smo ovim definirali limese samo u pozitivnoj beskonačnosti. Limesi u negativnoj beskonačnosti se definiraju posve analogno, pa to ostavljamo čitatelju za vježbu.

Zadatak 3.14 *Skiciraj graf neke funkcije $f(x)$ za koju vrijedi:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \text{ nije definiran, } \lim_{x\to 2} f(x) = +\infty \text{ i } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2.$$

Zadatak 3.15 *Skiciraj graf neke funkcije $f(x)$ za koju vrijedi:*

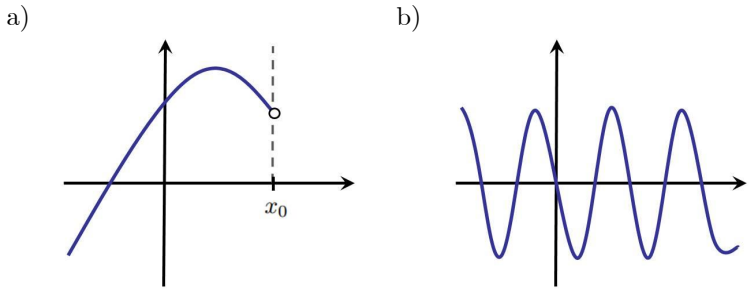
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1, \lim_{x\to 3} f(x) = 2 \text{ i } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Zadatak 3.16 *Skiciraj graf neke funkcije $f(x)$ za koju vrijedi:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to 0} f(x) \text{ ne postoji i } \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ ne postoji.}$$

3.1.4 Jednostrani limesi

Ako se točki x_0 u kojoj tražimo limes približavamo samo s jedne strane (s lijeva ili s desna), onda dolazimo do pojma jednostranih limesa (limes s lijeva ili limes s desna). Uočimo da za x koji teži s lijeva prema x_0 vrijedi da je uvijek nešto manji od x_0 (tj. $x = x_0 - "malo"$), pa tu težnju označavamo sa $x \to x_0^-$. Općeniti limes je bio definiran pomoću okolina, a jednostrani limes će biti definiran pomoću jednostranih okolina. U svemu ostalome definicija je analogna.



Slika 3.6: Limes funkcije u pozitivnoj beskonačnosti $+\infty$: a) nije definiran, b) ne postoji.

Definicija 3.17 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ gomilište skupa X. Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$* limes s lijeva *funkcije f u točki x_0 i pišemo*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

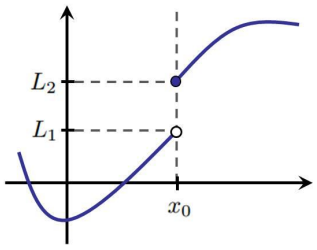
ako za svaku okolinu od L postoji lijeva okolina od x_0 koja se u nju preslika.

Definicija 3.18 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ gomilište skupa X. Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$* limes s desna *funkcije f u točki x_0 i pišemo*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

ako za svaku okolinu od L postoji desna okolina od x_0 koja se u nju preslika.

Pojam jednostranih limesa ilustriran je Slikom 3.7. Opet, kao i kod prethodnih limesa, tako i ovdje govorimo o jednostranom limesu koji nije definiran (točka x_0 nije gomilište domene) ili jednostranom limesu koji ne postoji (točka x_0 je gomilište domene, ali nije ispunjen uvjet limesa). Uočimo da su jednostrani limesi definirani samo u konačnoj točki. Pojam jednostranog limesa u beskonačnosti nema smisla, jer beskonačnosti nemaju i lijevu i desnu okolinu.



Slika 3.7: Funkcija u konačnoj točki x_0 ima jednostrani limes L_1 s lijeva, te jednostrani limes L_2 s desna.

Konačno, sljedeći teorem nam daje vezu jednostranih limesa i (obostranog) limesa u konačnoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

Teorem 3.19 *Funkcija f ima (obostrani) limes u točki x_0 ako i samo ako oba jednostrana limesa u točki x_0 postoje i međusobno su jednaki.*

Zadatak 3.20 *Skiciraj graf neke funkcije $f(x)$ za koju vrijedi:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to1^+} f(x) = -1 \text{ i } \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ nije definiran.}$$

Zadatak 3.21 *Skiciraj graf neke funkcije $f(x)$ za koju vrijedi:*

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = 0,\ \lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to2} f(x) = -\infty.$$

3.2 Limesi elementarnih funkcija

Obzirom da u praksi najviše radimo sa elementarnim funkcijama, a jako rijetko sa funkcijama koje nisu elementarne, posebnu pažnu posvećujemo određivanju limesa elementarnih funkcija. Pri određivanju limesa elementarnih funkcija možemo:

1. limes funkcije određivati po definiciji;
2. limes funkcije određivati koristeći strukturu klase elementarnih funkcija, tako da:
   (a) odredimo limese svih osnovnih elementarnih funkcija,
   (b) utvrdimo pravilo za limese 5 računskih operacija,

   pa ćemo onda znati odrediti limes (skoro) svih elementarnih funkcija.

Obzirom da je limes teško određivati po definiciji, mi ćemo uglavnom koristiti drugi pristup.

3.2.1 Limesi osnovnih elementarnih funkcija

Limesi osnovnih elementarnih funkcija određuju se iz poznavanja definicije i grafa tih funkcija.

Zadatak 3.22 *Za funkcije x^2, x^3, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ te $\sqrt{x}$ odredi limese u $-\infty, 0$ i $+\infty$.*

Zadatak 3.23 *Za funkcije e^x i $\ln x$ odredi limese u $-\infty, 0, 1$ i $+\infty$.*

Zadatak 3.24 *Za funkcije $\sin x$ i $\operatorname{tg} x$ odredi limese u $-\infty, 0, \frac{\pi}{2}$ i $+\infty$.*

Zadatak 3.25 *Za funkciju $\arcsin x$ odredi limese u $-\infty, 0, 1$ i $+\infty$.*

Zadatak 3.26 *Za funkciju $\operatorname{arctg} x$ odredi limese u $-\infty, 0$ i $+\infty$.*

3.2.2 Limesi i računske operacije s funkcijama

Ponašanje limesa prema pet računskih operacija s funkcijama određeno je sa sljedeća dva teorema.

Teorem 3.27 *Ako limesi* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *i* $\lim_{x\to x_0} g(x)$ *postoje i konačni su, onda vrijedi:*

1. $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$,
2. $\lim_{x\to x_0} (f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$,
3. $\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$,
4. $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$ *uz uvjet da je* $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Teorem 3.28 *Neka su* $f : X \to \mathbb{R}$ *i* $g : Y \to \mathbb{R}$ *funkcije takve da je kompozicija* $g \circ f$ *dobro definirana. Ako vrijedi*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \ i \ \lim_{y\to y_0} g(y) = L,$$

onda vrijedi

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = L.$$

Uočimo da su prethodna dva teorema iskazana za konačne limese u konačnim točkama. Mi znamo da vrijednost limesa osim konačne vrijednosti L može biti i beskonačna, a limes se osim u konačnoj točki x_0 može tražiti i u beskonačnosti. Postavlja se pitanje što sa limesima računskih operacija u tom slučaju.

Napomena 3.29 *Teorem 3.27 vrijedi i u slučaju kad* $x \to \pm\infty$, *ali ne vrijedi općenito u slučaju kad je vrijednost limesa beskonačna.*

Obzirom da Teorem 3.27 ne vrijede kad je vrijednost jednog ili oba limesa koji ulaze u računsku operaciju beskonačna, razmotrimo sada što se s limesom događa u tom slučaju. Vrijedi sljedeće:

Zbrajanje/oduzimanje

$$\pm\infty + c = \pm\infty$$
$$+\infty + \infty = +\infty$$
$$-\infty - \infty = -\infty$$
$$+\infty - \infty = \textbf{?}$$

Množenje

$$\pm\infty \cdot c = \begin{cases} \pm\infty, & \text{za } c > 0, \\ \mp\infty, & \text{za } c < 0, \\ \textbf{?}, & \text{za } c = 0. \end{cases}$$
$$+\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$
$$-\infty \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$$

Dijeljenje

$$\frac{c}{\pm\infty} = 0$$
$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = \textbf{?}$$
$$\frac{c}{0^{\pm}} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{za } c > 0, \\ \mp\infty, & \text{za } c < 0. \\ \textbf{?}, & \text{za } c = 0. \end{cases}$$

Potenciranje

$$c^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & \text{za } c > 1, \\ 0, & \text{za } 0 < c < 1, \\ \textbf{?}, & \text{za } c = 1. \end{cases}$$
$$\infty^c = \begin{cases} \infty, & \text{za } c > 0, \\ 0, & \text{za } c < 0, \\ \textbf{?}, & \text{za } c = 0. \end{cases}$$
$$0^0 = \textbf{?}.$$

Uočimo da na nekoliko mjesta u tablici stoje upitnici, a to je zato što vrijednost limesa u tim slučajevima nije određena nego ovisi o konkretnim funkcijama $f(x)$ i $g(x)$ koje ulaze u računsku operaciju (drugim riječima, rezultat se razlikuje od slučaja do slučaja). Takvi oblici se nazivaju neodređeni oblici i ima ih sedam:

$$\infty - \infty,\ \infty \cdot 0,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 1^{\infty},\ \infty^0,\ 0^0.$$

Naravno, jednakosti u gornjoj tablici ne treba shvaćati kao računanje s brojevima, nego kao računanje s limesima. Primjerice, izraz $\frac{5}{+\infty}$ u računu limesa znači da imamo funkcije f i g za koje vrijedi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 5 \text{ i } \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty,$$

a mi računamo limes

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = [\frac{5}{+\infty}] = 0$$

koji je određen i jednak nula. S druge strane, izraz $\frac{+\infty}{+\infty}$ u računu limesa znači da imamo funkcije f i g za koje vrijedi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \text{ i } \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty,$$

a mi računamo limes

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = [\frac{+\infty}{+\infty}] = ?$$

koji je neodređen i vrijednost mu ovisi od slučaja do slučaja, tj. o konkretnim funkcijama f i g. Kao primjer ponašanja limesa za neodređene oblike možemo navesti sljedeća tri limesa

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = [\frac{+\infty}{+\infty}] = 0,\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1} = [\frac{+\infty}{+\infty}] = +\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = [\frac{+\infty}{+\infty}] = 1.$$

Različita vrijednost ovih limesa posljedica je toga što polinom većeg stupnja brže teži u beskonačnost nego polinom manjeg stupnja. Polinomi istog stupnja jednako brzo teže u beskonačnost, a njihovoj vrijednosti u beskonačnosti najviše doprinosti vodeća potencija u polinomu, dok je doprinos ostalih članova polinoma zanemariv.

Također, vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = [\frac{+\infty}{+\infty}] = +\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} = [\frac{+\infty}{+\infty}] = 0.$$

Različita vrijednost ovih limesa posljedica je toga što eksponencijalna funkcija neusporedivo brže teži u beskonačnost od (bilo kojeg) polinoma, dok logaritamska funkcija neusporedivo sporije teži u beskonačnost od (bilo kojeg) polinoma.

Zadatak 3.30 *Koji od sljedećih limesa je određen, a koji neodređen oblik:*

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2}$, *b)* $\lim_{x\to-2} \frac{x^2-4}{x+2}$,
c) $\lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{x} - \sqrt{x})$, *d)* $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$,
e) $\lim_{x\to+\infty} x^2\sqrt{x-1}$, *f)* $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

Određene oblike odredi!

3.3 Neki osnovni limesi i svojstva

Pri određivanju limesa neodređenih oblika, koristan će nam biti i sljedeći teorem.

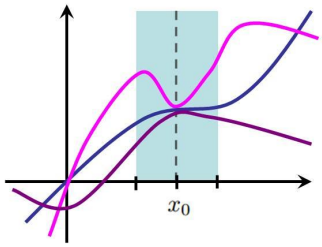
Teorem 3.31 (O dva policajca) *Neka je*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L.$$

Ako postoji okolina točke x_0 na kojoj vrijedi $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ za svaki x osim eventualno za x_0, onda vrijedi da je i

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = L.$$

Teorem o dva policajca ilustriran je Slikom 3.8, a može biti jako koristan pri određivanju brojnih limesa (najčešće su to oni koji uključuju ograničene funkcije poput sinusa i kosinusa).



Slika 3.8: Ilustracija Teorema o dva policajca.

Teorem 3.32 *Vrijedi*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Teorem 3.33 *Limes*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

postoji i iracionalan je broj.

Definicija 3.34 *Broj e definiran je sa*

$$e = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

i zove se Eulerova konstanta.

Teorem 3.35 *Vrijedi*

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Poglavlje 4

Neprekidnost

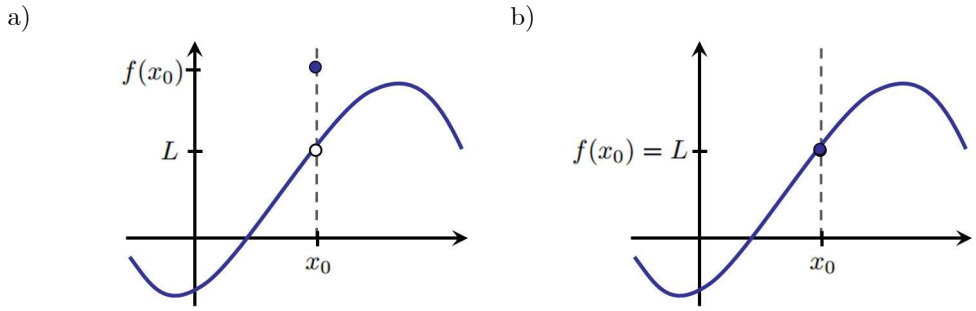
4.1 Definicija neprekidnosti

Definicija 4.1 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je $x_0 \in X$. Kažemo da je funkcija f* neprekidna u točki x_0 *ako vrijedi*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

U suprotnom kažemo da funkcija ima prekid *u točki $x_0 \in X$.*

Neformalnije rečeno, funkcija je neprekidna u nekoj točki domene ako je limes funkcije u toj točki jednak funkcijskoj vrijednosti. Primjer funkcije koja je neprekidna u točki x_0, te koja u točki x_0 ima prekid, ilustriran je Slikom 4.1.



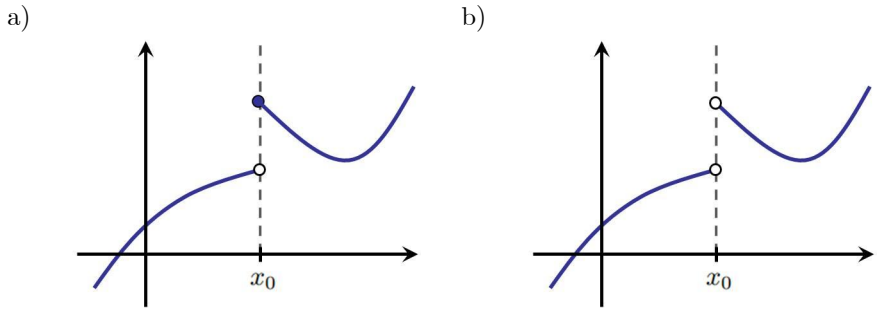
Slika 4.1: Primjer funkcije koja u točki x_0 : a) ima prekid, b) je neprekidna.

Uočimo da funkcija može imati prekid samo u točkama domene. Dakle, treba razlikovati prekid domene od prekida funkcije (vidi Sliku 4.2).

Ako funkcija f ima prekid u točki x_0, taj prekid može biti različitih vrsta.

- Kažemo da funkcija f ima *uklonjivi prekid* u točki x_0 ako su jednostrani limesi u točki x_0 konačni i međusobno jednaki, ali različiti od funkcijske vrijednosti, tj. ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \neq f(x_0).$$



Slika 4.2: Primjer funkcije koja u točki x_0 ima: a) prekid funkcije, b) prekid domene.

- Kažemo da funkcija f ima *prekid prve vrste* u točki x_0 (tzv. "skok") ako su jednostrani limesi u točki x_0 konačni, ali međusobno različiti.
- Kažemo da funkcija f ima *prekid druge vrste* u točki x_0 ako su jedan (ili oba) jednostrana limesa u točki x_0 beskonačni ili ne postoje.

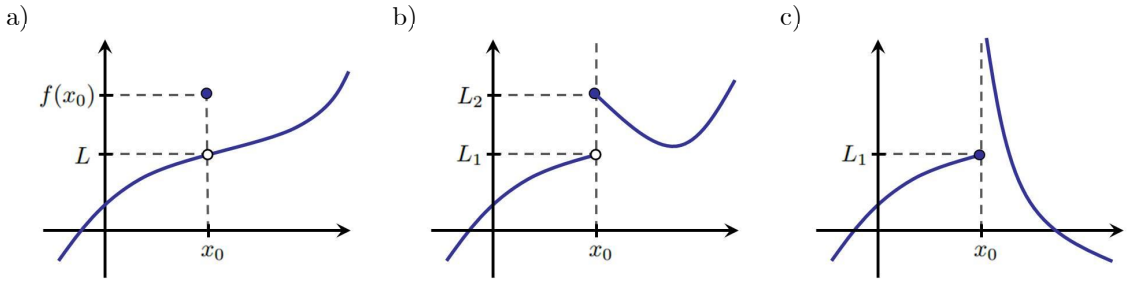
Vrste prekida ilustrirane su Slikom 4.3.

Zadatak 4.2 *Skiciraj graf neke funkcije za koju vrijedi:*

$$a)\ \begin{array}{l} f(1)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2 \end{array},\quad b)\ \begin{array}{l} f(3)=3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2 \end{array},\quad c)\ \begin{array}{l} f(2)=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1 \end{array}.$$

Je li funkcija neprekidna u istaknutoj točki? Ako funkcija ima prekid, koje je prekid vrste?

Definicija 4.3 *Kažemo da je funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna *ako je neprekidna u svakoj točki domene* X.



Slika 4.3: Vrste prekida funkcije: a) uklonjivi prekid, b) prekid prve vrste, b) prekid druge vrste.

4.2 Neprekidnost elementarnih funkcija

Kao i obično, obzirom da najviše radimo sa elementarnim funkcijama, nakon što smo pojam neprekidnosti definirali za općenite funkcije, zanima nas što se o tom pojmu može reći za funkcije koje pripadaju klasi elementarnih funkcija. Pri razmatranju neprekidnosti elementarnih funkcija možemo:

1. neprekidnost funkcije utvrđivati po definiciji;
2. neprekidnost funkcije utvrđivati koristeći strukturu klase elementarnih funkcija, tako da:
   (a) utvrdimo neprekidnost svih osnovnih elementarnih funkcija,
   (b) utvrdimo da svih 5 računskih operacija čuvaju neprekidnost,

   iz čega možemo zaključiti da su sve elementarne funkcije neprekidne.

Iskažimo sada formalno teoreme koji nam govore o neprekidnosti osnovnih elementarnih funkcija, te o odnosu 5 računskih operacija prema neprekidnosti.

Teorem 4.4 *Sve osnovne elementarne funkcije su neprekidne.*

Teorem 4.5 *Neka su funkcije f i g neprekidne u točki x_0. Tada su u točki x_0 neprekidne i funkcije $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, te $\frac{f}{g}$ (pod uvjetom da je $g(x_0)\neq 0$).*

Teorem 4.6 *Ako je funkcija f neprekidna u točki x_0, a funkcija g neprekidna u točki $y_0=f(x_0)$, onda je kompozicija $g\circ f$ neprekidna u točki x_0.*

Obzirom da su sve osnovne elementarne funkcije neprekidne, a operacije s funkcijama čuvaju neprekidnost, zaključujemo da su sve elemementarne funkcije neprekidne, što iskazujemo sljedećim teoremom.

Teorem 4.7 *Sve elementarne funkcije su neprekidne.*

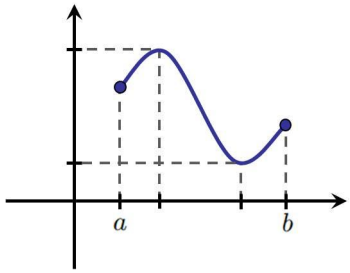
Zadatak 4.8 *Ispitaj neprekidnost funkcija:*

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & za\ x<1\\ \frac{1}{x} & za\ x\geq 1\end{cases},\ b)\ f(x)=\begin{cases}x^2-1 & za\ x\leq 2\\ 3-x & za\ x>2\end{cases},\ c)\ f(x)=\begin{cases}2^{-x} & za\ x\leq -1\\ 3-x^2 & za\ x>-1\end{cases}.$$

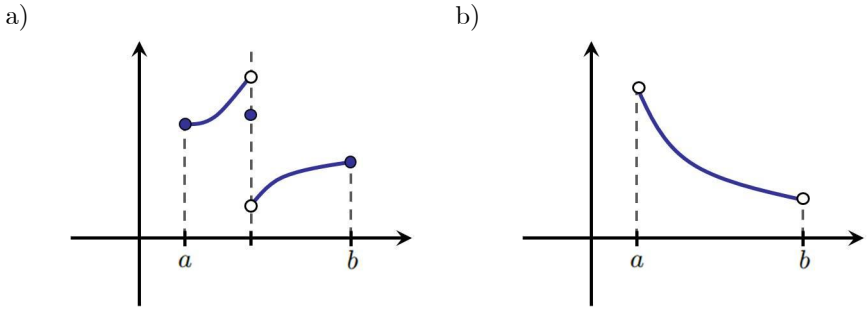
4.3 Neka svojstva neprekidne funkcije

Teorem 4.9 (O ekstremnoj vrijednosti) *Neka je f neprekidna funkcija definirana na zatvorenom intervalu $[a,b]$. Tada funkcija f postiže minimalnu i maksimalnu vrijednost. Štoviše, funkcija f postiže sve vrijednosti između minimalne i maksimalne.*

Teorem o ekstremnoj vrijednosti ilustriran je Slikom 4.4. Uočimo da su zahtjevi da funkcija bude neprekidna, te da interval bude zatvoren, jako važni, jer bez njih tvrdnja Teorema o ekstremnoj vrijednosti općenito ne vrijedi (vidi Sliku 4.5). Očita posljedica ovog teorema je sljedeća: ako za neprekidnu funkciju f vrijedi da su $f(a)$ i $f(b)$ brojevi suprotnog predznaka, onda postoji barem jedan $x\in\langle a,b\rangle$ takav da je $f(x)=0$ (vidi Sliku 4.6).



Slika 4.4: Ilustracija Teorema o ekstremnoj vrijednosti.



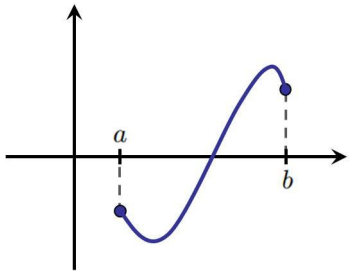
Slika 4.5: Teorem o ekstremnoj vrijednosti ne vrijedi: a) ako funkcija ima prekid, b) ako je funkcija definirana na otvorenom intervalu.

Teorem 4.10 (O komutiranju limesa i neprekidne funkcije) *Ako je*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

i ako je funkcija g neprekidna u točki y_0, onda vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} g\left(f\left(x\right)\right) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(y_0).$$



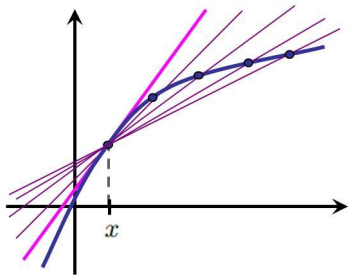
Slika 4.6: Posljedica Teorema o ekstremnoj vrijednosti.

Poglavlje 5

Derivacija

5.1 Definicija derivacije

Pojam derivacije motiviran je problemom polaganja tangente na graf funkcije. Uočimo da tangenta nastaje kao limes sekanti (vidi Sliku 5.1), pa je dakle koeficijent smjera tangente limes koeficijenata smjera tangenti.



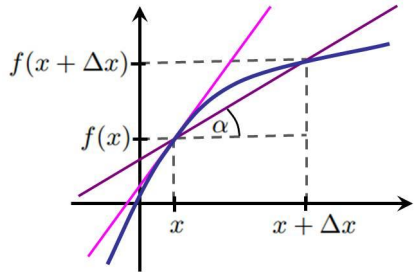
Slika 5.1: Tangenta kao limes sekanti.

Da bismo precizno matematički odredili jednadžbu tangente i njen koeficijent smjera, moramo uvesti precizne definicije svih objekata. Neka je, dakle, $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je $x \in X$ točka u kojoj želimo položiti tangentu. Razmotrimo sekantu na graf funcije koja siječe graf u točkama $T_1(x, f(x))$ i $T_2(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ kako je to prikazano na Slici 5.2. Neka je α kut kojeg sekanta zatvara s pozitivnim smjerom osi x. Iz trigonometrije pravokutnog trokuta znamo da za koeficijent smjera sekante k_s vrijedi

$$k_s = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

pa se onda koeficijent smjera tangente k_t izračunava kao

$$k_t = \lim_{\Delta x \to 0} k_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \overset{ozn}{=} f'(x).$$



Slika 5.2: Koeficijent smjera sekante.

Obzirom da će nam koeficijent smjera tangente biti jako važan kod analiziranja funkcije, uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 5.1 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je $x \in X$. Kažemo da je funkcija f* derivabilna *u točki $x \in X$ ako limes*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

postoji i konačan je. Taj limes označavamo s $f'(x)$ i nazivamo derivacijom *funkcije f u točki x.*

Veličina $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ naziva se diferencija funkcije f u točki x, te ona mjeri promjenu (prirast) funkcije f u točki x nakon pomaka Δx. Obzirom da često označavamo $y = f(x)$, onda se označava i $y' = f'(x)$, $\Delta y = \Delta f(x)$. Sada možemo definirati funkciju koja svakoj točki pridružuje derivaciju u toj točki.

Definicija 5.2 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je $X' \subseteq X$ skup svih točaka u kojima je funkcija f derivabilna. Funkciju $f' : X' \to \mathbb{R}$ koja svakoj točki $x \in X'$ pridružuje broj $f'(x)$ nazivamo* derivacijom *funkcije f.*

Zadatak 5.3 *Odredi po definiciji derivaciju funkcija: a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = \sqrt{x}$.*

Pokazali smo da derivacija $f'(x)$ geometrijski predstavlja koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki x. Sada možemo definirati pravce tangente i normale na graf funkcije u nekoj točki domene.

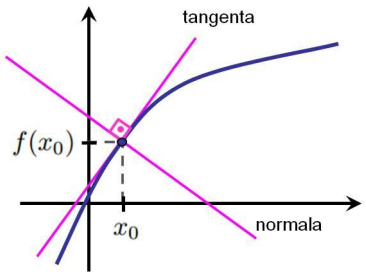
Definicija 5.4 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija derivabilna u točki $x_0 \in X$.* Tangenta *na graf funkcije f u točki x_0 je pravac koji prolazi točkom $T(x_0, f(x_0))$ i ima koeficijent smjera $f'(x_0)$.* Normala *na graf funkcije f u točki x_0 je pravac koji prolazi točkom $T(x_0, f(x_0))$ i okomit je na tangentu.*

Tangenta i normala na graf ilustrirane su Slikom 5.3. Obzirom da nam je poznata jednadžba pravca kroz jednu točku sa zadanim koeficijentom smjera, zaključujemo da jednadžba tangente glasi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)\,,$$

dok jednadžba normale glasi

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0)\,.$$



Slika 5.3: Tangenta i normala na graf funkcije.

Zadatak 5.5 *Odredi jednadžbu tangente i normale na graf funkcije* $f(x) = \sqrt{x}$ *u točki* $x_0 = 4$.

Sada želimo utvrditi u kakvim točakama domene funkcija nije derivabilna. Obzirom da je derivacija definirana kao limes koji mora postojati i biti konačan, vidimo da funkcija nije derivabilna imati u točkama domene u kojima:

1. limes nije definiran (izolirane točke domene),
2. limes jest definiran, ali ne postoji (točke prekida i tzv. "špicevi"),
3. limes je i definiran i postoji, ali je beskonačan (točke u kojima je tangenta vertikalna).

Točke u kojima funkcija nije derivabilna ilustrirane su Slikom 5.4. Uočimo da je u točkama prekida i špicevima problem to što se tangenta s lijeva i tangenta s desna razlikuju. To znači da su jednostrani limesi u tim točkama različiti, pa možemo pričati o derivaciji s lijeva i derivaciji s desna. Definirajmo to i formalno. Za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ i točku $x \in X$ uvodimo oznake:

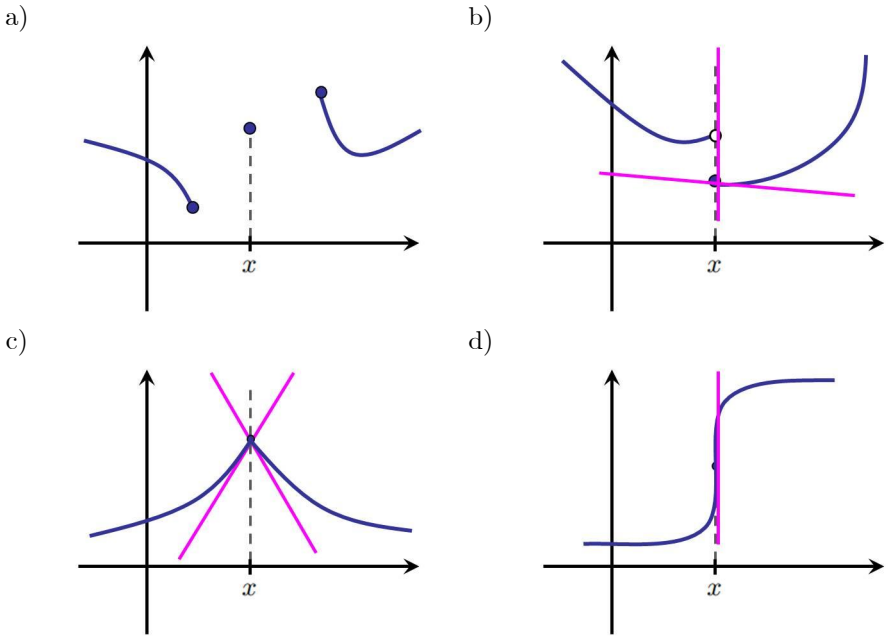
$$f'(x^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad f'(x^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Definicija 5.6 *Neka je* $f : X \to \mathbb{R}$ *funkcija, te neka je* $x \in X$. *Kažemo da je funkcija* f derivabilna s lijeva *u točki* $x \in X$ *ako limes* $f'(x^-)$*postoji i konačan je. Kažemo da je funkcija* f derivabilna s desna *u točki* $x \in X$ *ako limes* $f'(x^+)$ *postoji i konačan je.*

Navedimo i sljedeći teorem koji daje važnu vezu između neprekidnosti i derivabilnosti.

Teorem 5.7 *Ako je funkcija* f *derivabilna u točki* x, *onda je funkcija* f *i neprekidna u točki* x.

Uočimo da obrat teorema ne vrijedi, tj. mogu postojati točke u kojima je funkcija neprekidna, a nije derivabilna (primjer za to su špicevi).



Slika 5.4: Problemi s derivabilnošću: a) izolirana točka, b) točka prekida, c) špic, d) točka u kojoj je tangenta vertikalna.

5.2 Deriviranje elementarnih funkcija

Kao i kod pojmova limesa i neprekidnosti funkcije, tako se i kod deriviranja posebno osvrćemo na deriviranje elementarnih funkcija. Derivaciju elementarnih funkcija možemo određivati:

1. po definiciji derivacije,
2. koristeći strukturu klase elementarnih funkcija (tzv. deriviranje pomoću tablice i pravila deriviranja), tako da:
   (a) odredimo derivaciju svih osnovnih elementarnih funkcija (formiramo tablicu osnovnih derivacija),
   (b) utvrdimo pravila za deriviranje računskih operacija s funkcijama (pravila deriviranja),

   pa ćemo onda znati odrediti derivaciju svake elementarne funkcije.

Najprije ćemo uvesti pravila deriviranja, jer se poslije pokaže da nije potrebno sve osnovne elementarne funkcije derivirati po definiciji, nego za neke možemo koristiti i pravila.

5.2.1 Pravila deriviranja

Najprije ćemo uvesti pravilo za deriviranje inverza, koje će nam pomoći da odredimo derivacije onih osnovnih elementarnih funkcije koje su definirane kao inverzi. Zatim uvodimo pravila za deriviranje

pet računskih operacija sa funkcijama (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i kompozicija), pomoću kojih ćemo kasnije moći derivirati bilo koju elementarnu funkciju (nakon što odredimo derivaciju svih osnovnih elementarnih funkcija).

Teorem 5.8 (Pravilo za deriviranje računskih operacija) *Neka su funkcije f i g derivabilne u točki x. Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned}
(f(x)+g(x))' &= f'(x)+g'(x),\\
(f(x)-g(x))' &= f'(x)-g'(x),\\
(f(x)\cdot g(x))' &= f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x),\\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2} \quad za\ g(x)\neq 0.
\end{aligned}$$

Teorem 5.9 (Pravilo za deriviranje kompozicije) *Ako je funkcija f derivabilna u točki x, a funkcija g u točki $y=f(x)$, onda je kompozicija $g\circ f$ derivabilna u točki x i vrijedi*

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))\cdot f'(x).$$

Teorem 5.10 (Pravilo za deriviranje inverzne funkcije) *Neka je funkcija $f: X\to Y$ bijekcija koja je derivabilna u točki x, te neka je $f'(x)\neq 0$. Nadalje, neka je inverzna funkcija $f^{-1}: Y\to X$ neprekidna u točki $y=f(x)$. Tada vrijedi*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

5.2.2 Tablica osnovnih derivacija

Osnovne elementarne funkcije deriviramo tako da:

1. po definiciji deriviramo funkcije c, x^n, a^x, $\sin x$, $\cos x$,
2. po pravilu za deriviranje razlomka odredimo derivaciju funkcija $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$, $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ i $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$,
3. po pravilu za deriviranje kompozicije odredimo derivaciju funkcije $x^{\frac{m}{n}}=(x^{\frac{1}{n}})^m$,
4. po pravilu za deriviranje inverza odredimo derivaciju funkcija $x^{\frac{1}{n}}$, $x^{-\frac{1}{n}}$, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

To ćemo napraviti u sljedećim primjerima, a nakon što to napravimo rezultate možemo posložiti u tablicu koju ćemo nazivati Tablicom osnovnih derivacija (vidi Tablicu 5.1).

Primjer 5.11 *Odredi derivacije funkcija c, x^n, e^x, $\sin x$ i $\cos x$.*

Rješenje. Ako je $f(x)=c$, onda imamo

$$(c)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Ako je $f(x) = x^n$, onda imamo

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n\right) - x^n}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}\right) = \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Ako je $f(x) = a^x$, onda imamo

$$\begin{aligned}
(a^x)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \left\{ \begin{array}{c} a^{\Delta x} - 1 = t \\ \Delta x = \log_a(t+1) \\ \Delta x \to 0 \Rightarrow t \to 0 \end{array} \right\} = \\
&= a^x \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = a^x \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}} = a^x \lim_{t\to 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{t}\ln(t+1)} = \\
&= a^x \ln a \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}} = a^x \ln a.
\end{aligned}$$

Ako je $f(x) = \sin x$, onda imamo

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin x\cos\Delta x + \cos x\sin\Delta x - \sin x}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left(\frac{\sin x\,(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \frac{\cos x\sin\Delta x}{\Delta x}\right) = \\
&= \sin x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

Ako je $f(x) = \cos x$, onda imamo

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos x\cos\Delta x - \sin x\sin\Delta x - \cos x}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left(\frac{\cos x\,(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} - \frac{\sin x\sin\Delta x}{\Delta x}\right) = \\
&= -\sin x.
\end{aligned}$$

■

Primjer 5.12 *Odredi derivaciju funkcija* x^{-n} *(*$n \in \mathbb{N}$*),* $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Rješenje. Funkcije x^{-n} ($n \in \mathbb{N}$), $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ nastaju iz funkcija x^n, $\sin x$ i $\cos x$ pomoću računskih operacija, pa možemo primijeniti Teorem kod određivanja njihovih derivacija. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\left(x^{-n}\right)' &= \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot \left(x^n\right)'}{\left(x^n\right)^2} = \frac{0 \cdot x^n - n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}, \\
(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \\
(\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x \,(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

■

Primjer 5.13 *Odredi derivacije funkcija* $x^{\frac{1}{n}}$, $x^{-\frac{1}{n}}$, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Rješenje. Zadane funkcije su inverzne funkcije funkcija x^n, x^{-n}, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$, pa kod određivanja derivacije možemo koristiti pravilo za deriviranje inverza. Označimo $x^{\frac{1}{n}} = y$, pa je $x = y^n$ i imamo

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{\left(y^n\right)'} = \frac{1}{n y^{n-1}} = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Na sličan način dobivamo $\left(x^{-\frac{1}{n}}\right)' = -\frac{1}{n} x^{-\frac{1}{n}-1}$. Kod logaritamske funkcije označimo $\log_a x = y$, pa je $x = a^y$ i imamo

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\left(a^y\right)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Kod arkus sinus funkcije označimo $\arcsin x = y$, pa je $x = \sin y$ i imamo

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Na sličan način dobivamo

$$\begin{aligned}
(\arccos x)' &= \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}, \\
(\operatorname{arcctg} x)' &= \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = \frac{1}{-\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 y + 1} = -\frac{1}{x^2 + 1}.
\end{aligned}$$

■

Primjer 5.14 *Odredi derivaciju funkcije* $x^{\frac{m}{n}}$ *za* $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
x^r	rx^{r-1}	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Tablica 5.1: Tablica osnovnih derivacija.

Rješenje. Zadana funkcija je kompozicija funkcija $x^{\frac{1}{n}}$ i x^m, pa kod određivanja derivacije možemo koristiti pravilo za deriviranje kompozicije. Vrijedi

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)' = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}.$$

■

Odredili smo derivacije svih osnovnih elementarnih funkcija, pa sada možemo formirati Tablicu 5.1 osnovnih derivacija.

Sada se derivacija općenite elementarne funkcije može određivati tako da se po pravilima deriviranja derivacija svede na derivacije osnovnih elementarnih funkcija koje onda očitamo iz tablice osnovnih derivacija.

Zadatak 5.15 *Odredi derivaciju funkcije:*

a) $f(x) = x^2 + \sin x$, *b)* $f(x) = e^x - \ln x$, *c)* $f(x) = x^3 \operatorname{tg} x$,
d) $f(x) = \frac{x}{e^x}$, *e)* $f(x) = \cos x^2$.

Napiši najprije pravilo po kojem ćeš derivirati (ime i formulu).

5.3 Deriviranje implicitno zadanih funkcija

Neka je funkcija $y = f(x)$ implicitno zadana izrazom $F(x, y) = 0$. Derivaciju funkcije $y = f(x)$ tada određujemo deriviranjem izraza $F(x, y) = 0$ pri čemu izraze koji sadrže zavisnu varijablu y deriviramo primjenjujući Teorem o deriviranju kompozicije funkcija.

Zadatak 5.16 *Odredi tangentu na krivulju* $x^2 - xy + y^2 = 3$ *u točki* $x_0 = 1$.

5.4 Logaritamsko deriviranje

Pokažimo kako se deriviraju funkcije oblika

$$y = f(x)^{g(x)}.$$

Deriviranje ovakvih funkcija provodi se u tri koraka: 1) logaritmira se jednakost $y = f(x)^{g(x)}$, 2) korištenjem svojstava logaritma eksponencijalni izraz se transformira u umnožak, te se 3) derivira dobivena implicitno zadana funkcija. Ovim postupkom dobije se

$$y' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \right).$$

5.5 Definicija diferencijala

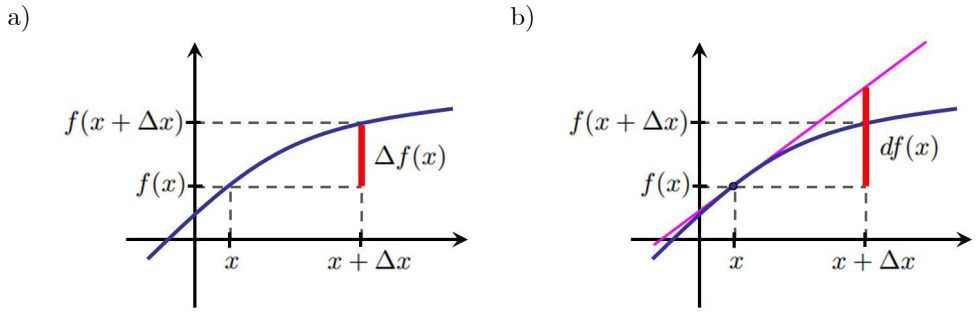
Obzirom da u suštini problematike deriviranja stoji mjerenje promjene funkcijske vrijednosti nakon pomaka Δx, uveli smo veličinu $\Delta f(x)$ koja se zove diferencija funkcije, definirana je formulom

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

a mjeri prirast funkcijske vrijednosti nakon pomaka Δx (vidi Sliku 5.5 a)). Međutim, funkcija se u okolini neke točke x može dobro aproksimirati tangentom na graf funkcije u točki x. Dakle, prirast funkcije nakon pomaka Δx se može dobro aproksimirati prirastom do tangente. Prirast do tangente nakon pomaka Δx označavat ćemo sa $df(x)$ i nazivati diferencijalom funkcije (vidi Sliku 5.5 b)). Sada se postavlja pitanje formule pomoću koje se za zadani Δx može izračunavati veličina $df(x)$. Obzirom da je $f'(x)$ koeficijent smjera tangente, iz trigonometrije pravokutnog trokuta zaključujemo da vrijedi

$$df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Uočimo da i diferencija i diferencijal ovise, osim o x, i o odabranom Δx, pa bi preciznije trebalo pisati $\Delta f(x)(\Delta x)$ i $df(x)(\Delta x)$. Definirajmo sada formalno pojam diferencijala.



Slika 5.5: Geometrijsko značenje: a) diferencije $\Delta f(x)$, b) diferencijala $df(x)$.

Definicija 5.17 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija derivabilna u točki $x \in X$. Tada je* diferencijal $df(x)$ *funkcije f u točki x definiran sa $df(x) = f'(x)\Delta x$.*

Često se označava $\Delta x = dx$, pa se formula kojom je definiran diferencijal zapisuje sa $df(x) = f'(x)dx$. Također, iz tog zapisa slijedi i česta oznaka za derivaciju $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$. Nadalje, obzirom da često označavamo $y = f(x)$, onda se u literaturi često mogu naći oznake $\Delta y = \Delta f(x)$ za diferenciju, te $dy = df(x)$ za diferencijal.

Pokažimo sada precizno računski da za male Δx diferencijal $df(x)$ jako dobro aproksimira diferenciju $\Delta f(x)$, što u suštini znači da u dovoljno maloj okolini točke x tangenta jako dobro aproksimira graf funkcije. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)-df(x)}{\Delta x}\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}-\frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f'(x)\right)= \\ &= f'(x)-f'(x)=0.\end{aligned}$$

Ovo znači da je za dovoljno male Δx razlika između veličina $\Delta f(x)$ i $df(x)$ zanemarivo mala u odnosu na veličinu Δx.

Zadatak 5.18 *Odredi diferencijal funkcije: a)* $f(x)=\sqrt{x}$ *u točki* $x=4$ *za pomak* $\Delta x=\frac{1}{2}$, *b)* $f(x)=\frac{4}{x}$ *u točki* $x=2$ *za pomak* $\Delta x=\frac{1}{4}$. *Skiciraj geometrijsko značenje diferencijala.*

5.6 Derivacije i diferencijali višeg reda

Neka je $f: X\to\mathbb{R}$ funkcija i $f': X'\to\mathbb{R}$ njena derivacija. Obzirom da je f' također funkcija, možemo i nju derivirati, tj. za $x\in X'$ definiramo

$$f''(x)=(f')'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}.$$

Ako $f''(x)$ postoji i konačan je, onda kažemo da je funkcija f dva puta derivabilna u točki x, a broj $f''(x)$ nazivamo derivacijom drugog reda funkcije f u točki x. Sada možemo definirati derivaciju i diferencijal drugog reda.

Definicija 5.19 *Neka je* $f: X\to\mathbb{R}$ *funkcija i neka je* $X''\subseteq X$ *skup svih točaka u kojima je funkcija* f *dva puta derivabilna. Tada funkciju* $f'': X''\to\mathbb{R}$ *koja broju* $x\in X''$ *pridružuje broj* $(f')'(x)=f''(x)$ *nazivamo derivacijom drugog reda funkcije* f.

Definicija 5.20 *Neka je* $f: X\to\mathbb{R}$ *funkcija, te neka je* $x\in X$ *točka u kojoj je funkcija* f *dva puta derivabilna. Diferencijal drugog reda* $d^2f(x)$ *funkcije* f *u točki* x *definiran je sa* $d^2f(x)=f''(x)\cdot\Delta x^2$.

Naravno, postupak deriviranja se sada može primijeniti dalje na funkciju f''. Općenito, derivacija $n-$tog reda $f^{(n)}(x)$ funkcije f u točki x definirana je induktivno sa

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}\right)'(x),$$

a diferencijal $n-$tog reda $d^nf(x)$ sa

$$d^nf(x)=f^{(n)}(x)\cdot\Delta x^n.$$

Zadatak 5.21 *Odredi* $f''(x)$ *ako je: a)* $f(x)=x^3+3x^2$, *b)* $f(x)=e^x$.

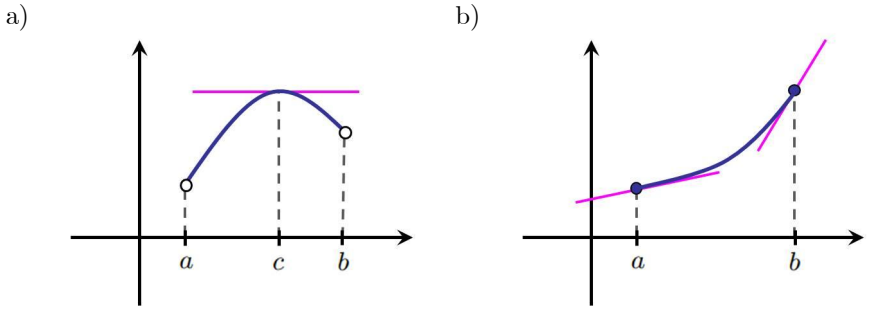
Zadatak 5.22 *Odredi* $f^{(4)}(x)$ *ako je: a)* $f(x)=\sin x$, *b)* $f(x)=\ln x$.

5.7 Osnovni teoremi diferencijalnog računa

Navedimo sada nekoliko osnovnih teorema diferencijalnog računa.

Teorem 5.23 (Fermat) *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija koja na intervalu $[a, b] \subseteq X$ najveću ili najmanju vrijednost postiže u unutarnjoj točki $c \in \langle a, b\rangle$ intervala. Ako je funkcija f derivabilna u točki c, onda je $f'(c) = 0$.*

Geometrijski, Fermatov teorem se može interpretirati na sljedeći način: ako u unutarnjoj točki intervala c s najmanjom ili najvećom funkcijskom vrijednošću tangenta na graf postoji, onda je ta tangenta vodoravna (vidi Sliku 5.6 a)). Uočimo da je u Fermatovom teoremu jako važna pretpostavka da je c unutarnja točka intervala (tj. $c \in \langle a, b\rangle$). Naime, funkcija f u rubnim točkama intervala $[a, b]$ može postizati najmanju ili najveću vrijednost, a da tangenta ipak ne bude vodoravna (vidi Sliku 5.6 b)).



Slika 5.6: Fermatov teorem: a) u unutarnjim točkama intervala vrijedi, b) na rubovima intervala općenito ne vrijedi.

Sljedeći teorem je posljedica Fermatovog teorema.

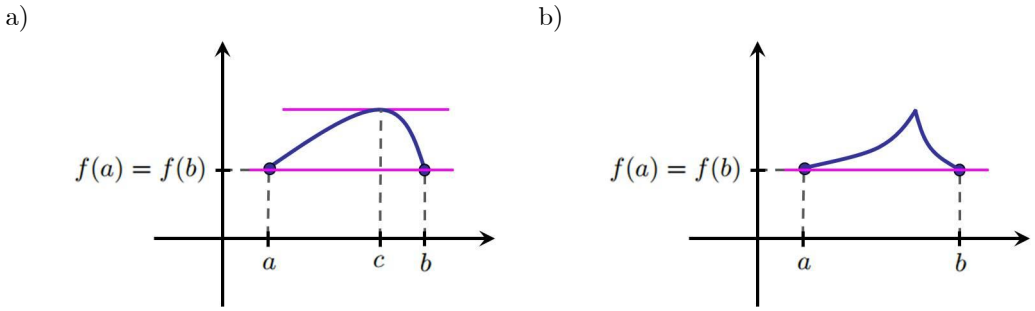
Teorem 5.24 (Rolle) *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija koja je neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b] \subseteq X$, derivabilna na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$, te neka je $f(a) = f(b)$. Tada postoji unutarnja točka $c \in \langle a, b\rangle$ intervala takva da je $f'(c) = 0$.*

Geometrijski, Rolleov teorem se može interpretirati na sljedeći način: ako je sekanta na graf kroz krajnje točke intervala $[a, b]$ vodoravna, onda postoji unutarnja točka c intervala u kojoj je tangenta na graf vodoravna (vidi Sliku 5.7 a)). Uočimo da je uvjet derivabilnosti funkcije f na intervalu $\langle a, b\rangle$ važan, jer se bez njega može dogoditi da Rolleov teorem ne vrijedi, tj. da funkcija nije derivabilna u točki koja bi trebala biti dodirna točka pravca paralelnog sa sekantom (vidi Sliku 5.7 b)).

Rolleov teorem se može poopćiti i na slučaj kad sekanta na graf kroz rubne točke intervala nije vodoravan pravac. Poopćenja su dana Cauchyjevim i Lagrangeovim teoremom.

Teorem 5.25 (Cauchy) *Neka su f i g funkcije koje su neprekidne na zatvorenom intervalu $[a, b]$, derivabilne na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$, te neka je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$. Tada postoji unutarnja točka $c \in \langle a, b\rangle$ intervala takva da je*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$



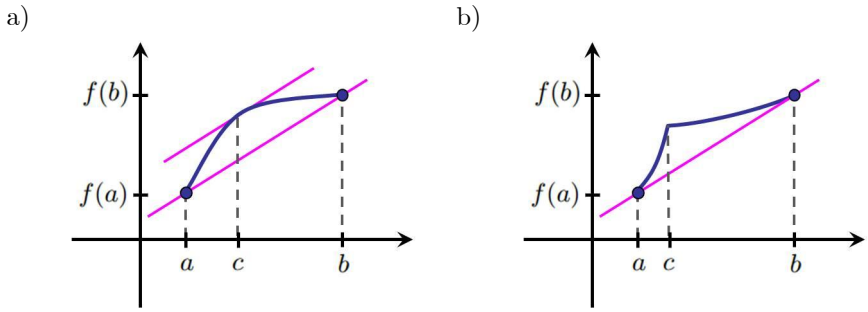
Slika 5.7: Rolleov teorem: a) za derivabilnu funkciju vrijedi, b) za funkciju koja nije u svim unutarnjim točkama derivabilna općenito ne vrijedi.

Ako u Cauchyjevom teoremu stavimo $g(x) = x$, tada je $g'(x) = 1$, te $g(b) - g(a) = b - a$, pa kao izravnu posljedicu dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 5.26 (Lagrange) *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija koja je neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b] \subseteq X$, derivabilna na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$. Tada postoji unutarnja točka $c \in \langle a, b\rangle$ intervala takva da je*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

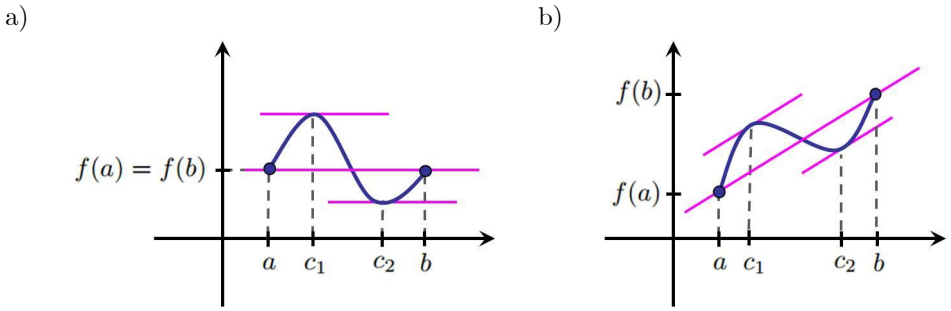
Geometrijski, Lagrangeov teorem se može interpretirati na sljedeći način: ako je sekanta na graf kroz krajnje točke intervala $[a, b]$ kosa, onda postoji unutarnja točka c intervala u kojoj je tangenta na graf paralelna sa tom sekantom (vidi Sliku 5.8). Naravno, Lagrangeov teorem uključuje i slučaj kad je sekanta vodoravna, ali taj slučaj ne spominjemo posebno, jer je taj slučaj pokriven Rolleovim teoremom. Također, uvjet derivabilnosti funkcije f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je opet važan, jer se bez njega može dogoditi da Lagrangeov teorem ne vrijedi, tj. da funkcija nije derivabilna u točki koja bi trebala biti dodirna točka tangente paralelne sa sekantom (vidi Sliku 5.8).



Slika 5.8: Lagrangeov teorem: a) za derivabilnu funkciju vrijedi, b) za funkciju koja nije u svim unutarnjim točkama derivabilna općenito ne vrijedi.

Konačno, uočimo da i Rolleov i Lagrangeov teorem osiguravaju postojanje barem jedne točke c s navedenim svojstvom, no to nipošto ne znači da ta točka mora biti jedina, nego ih može biti i

više (vidi Sliku 5.9).



Slika 5.9: Primjer da može postojati više točaka c za: a) Rolleov teorem, b) Lagrangeov teorem.

Teorem 5.27 (L'Hospitalovo pravilo) *Neka za funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 \ i \ \lim_{x\to c} g(x) = 0$$

pri čemu je $c \in \langle a, b\rangle \subseteq X$. Neka su f i g neprekidne na skupu $[a, b]$ i neprekidno derivabilne na skupu $\langle a, b\rangle \setminus \{c\}$. Ako postoji $\lim_{x\to c} f'(x)/g'(x) = k$, pri čemu je $k \in \mathbb{R}$ ili $k = +\infty$ ili $k = -\infty$, onda je

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

Napomena 5.28

1. *L'Hospitalovo pravilo vijedi i kada $x \to +\infty$ ili $x \to -\infty$, za neodredeni oblik ∞/∞ te za limese i derivacije slijeva ili zdesna.*

2. *L'Hospitalovo pravilo se može primijeniti više puta uzastopce ako se ponovo dobije jedan od neodređenih oblika $0/0$ ili ∞/∞ te ako nove funkcije ispunjavaju uvjete Teorema 5.27 ili neke njegove varijante iz prethodne točke ove napomene.*

3. *Ostali neodređeni oblici se pogodnim transformacijama mogu svesti na jedan od oblika $0/0$ ili ∞/∞.*

Poglavlje 6

Tok i graf funkcije

6.1 Asimptopte

Asimptota funkcije je svaki pravac sa svojstvom da udaljenost između točke na grafu funkcije i tog pravca teži k nuli kada točka na grafu odmiče u beskonačnost. Funkcija može imati vertikalne, horizontalne i kose asimptote.

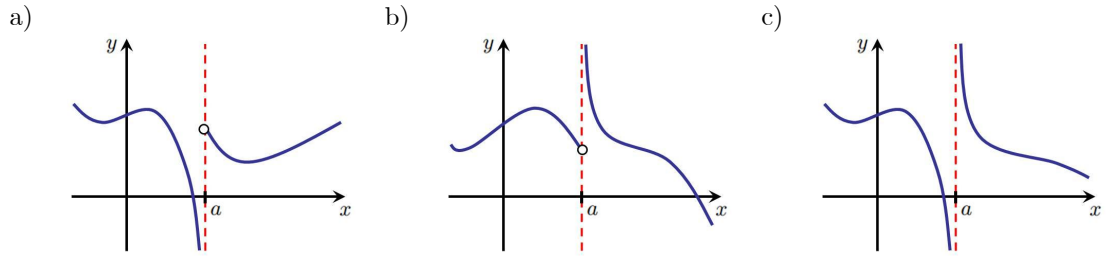
Definicija 6.1 *Pravac $x = a$ je vektikalna asimptota grafa funkcije f s lijeva, ako je*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \text{ ili } \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

Pravac $x = a$ je vektikalna asimptota grafa funkcije f s desna, ako je

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \text{ ili } \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty.$$

Uočimo da pravac $x = a$ može biti samo lijeva, samo desna, te obostrana asimptota (vidi Sliku 6.1). Ako je pravac $x = a$ obostrana vertikalna asimptota, onda često kažemo samo da je vertikalna asimptota. Vertikalna asimptota može postojati na otvorenim konačnim rubovima domene, te u točkama prekida.



Slika 6.1: Pravac $x = a$ je vertikalna asimptota: a) samo s lijeva, b) samo s desna, c) s obje strane.

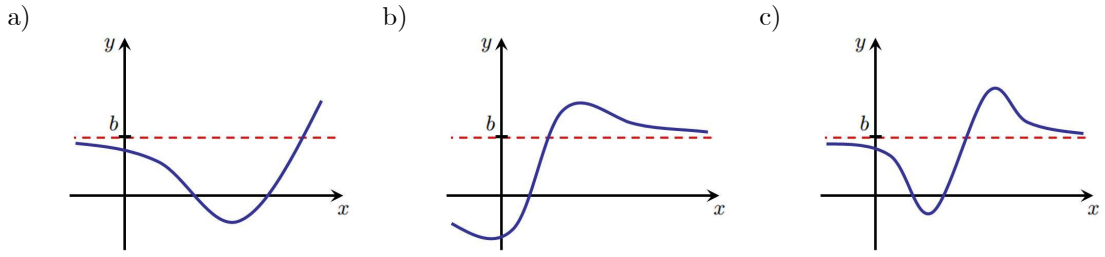
Definicija 6.2 *Pravac $y = b$ je horizontalna asimptota grafa funkcije f s lijeva ako je*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

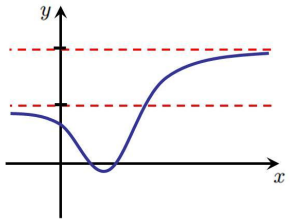
Analogno, pravac $y = b$ je horizontalna asimptota grafa funkcije f s desna ako je

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

Uočimo da pravac $y = b$ može biti samo lijeva, samo desna, te obostrana horizontalna asimptota (vidi Sliku 6.2). Također, ako neki graf ima horizontalnu asimptotu s obje strane, to ne mora biti isti pravac (vidi Sliku 6.3). Važno je napomenuti da horizontalne asimptote mogu postojati samo na beskonačnim rubovima domene, te ako domena nema beskonačni rub s jedne ili s obje strane, onda nema smisla tražiti asimptotu na toj jednoj ili obje strane jer u tom slučaju odgovarajući limes jednostavno nije definiran.



Slika 6.2: Pravac $y = b$ je horizontalna asimptota: a) samo s lijeva, b) samo s desna, c) s obje strane.



Slika 6.3: Horizontalna asimptota s obje strane ne mora biti isti pravac.

Konačno, preostaje definirati kose asimptote. Dok su vertikalni i horizontalni pravci određeni samo jednim brojem, odsječkom a na osi x za vertikalne pravce, odnosno odsječkom b na osi y za horizontalne pravce, kosi pravci imaju jednadžbu oblika $y = kx + l$ pri čemu je k koeficijent smjera, a l odsječak na osi y. To znači da za definirati kosu asimptotu treba uvesti dvije formule - formuu za k i formulu za l.

Definicija 6.3 *Kažemo da je pravac $y = kx + l$ kosa asimptota grafa funkcije f s lijeva ako postoje*

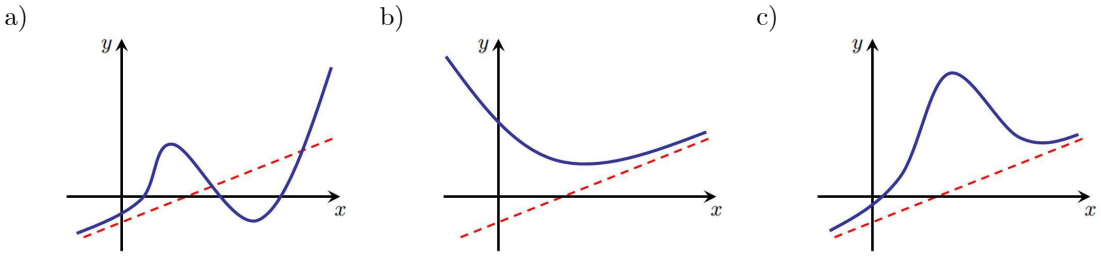
k,l $\in \mathbb{R}$ *(*$k \neq 0$*) takvi da je*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k \ i \ \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = l.$$

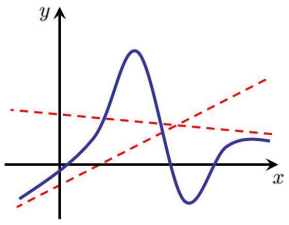
Analogno, pravac $y = kx + l$ *je kosa asimptota grafa funkcije* f *s desna ako postoje* $k,l \in \mathbb{R}$ *(*$k \neq 0$*) takvi da je*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \ i \ \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = l.$$

Dakle, da bi postojala kosa asimptota, odgovarajući par limesa mora postojati i biti konačan (jednak realnim, dakle konačnim brojevima $k, l \in \mathbb{R}$). Uočimo dodatni uvjet $k \neq 0$. Razlog takvom ograničenju je što za $k = 0$ dobivamo horizontalni pravac, a horizontalne asimptote smo već definirali. Pravac $y = kx + l$ može biti samo lijeva, samo desna, te obostrana kosa asimptota (vidi Sliku 6.4). No, ako kosa asimptota s obje strane postoji, to ne mora biti isti pravac (vidi Sliku 6.5). Valja napomenuti i da ne mogu s iste strane postojati i horizontalna i kosa asimptota, jer u tom slučaju krivulja ne bi predstavljala graf funkcije, ali horizontalna i kosa asimptota s različitih strana mogu postojati (vidi Sliku 6.6).



Slika 6.4: Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota: a) samo s lijeva, b) samo s desna, c) s obje strane.

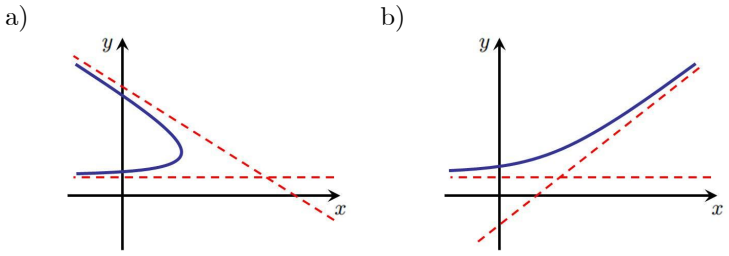


Slika 6.5: Kosa asimptota s obje strane ne mora biti isti pravac.

Kose asimptote, kao i horizontalne, mogu postojati u beskonačnim rubovima domene, te ako domena neke funkcije nema jedan ili oba beskonačna ruba, onda na tom jednom ili oba beskonačna ruba nema smisla tražiti asimptotu jer odgovarajući limesi u tom beskonačnom kraju nisu definirani.

Zadatak 6.4 *Neprekidna funkcija* f *ima domenu:*

a) $\langle -1, +\infty \rangle$, *b)* $\langle 0, 1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$, *c)* $\langle -\infty, 0]$,
d) $\langle -\infty, +\infty \rangle$, *e)* $\langle -2, 2 \rangle$, *f)* $[-2, 2]$.



Slika 6.6: Horizontalna i kosa asimptota: a) ne mogu postojati obje s iste strane, ali b) mogu postojati sa različitih strana.

Postavi limese kojima bi tražio asimptote funkcije!

Zadatak 6.5 *Nabroji barem tri raznovrsne osnovne elementarne funkcije koje imaju vertikalne asimptote (samo jedna smije biti opća potencija). Za svaku funkciju skiciraj graf i navedi barem jedan pravac koji je vertikalna asimptota.*

Zadatak 6.6 *Nabroji barem tri raznovrsne osnovne elementarne funkcije koje imaju horizontalne asimptote (samo jedna smije biti opća potencija). Za svaku funkciju skiciraj graf i napiši koji pravci su horizontalne asimptote.*

6.2 Monotonost

U poglavlju o svojstvima funkcije definirali smo monotone funkcije, te smo rekli da je funckija f monotono rastuća (padajuća) na intervalu I ako i samo ako je svaka sekanta na graf na tom intervalu rastuća (padajuća). Povežimo sada to sa tangentom, odnosno derivacijom. Naime, ako je funkcija f rastuća na intervalu I domene, onda je svaka sekanta grafa na tom intervalu rastuća, što dalje implicira da je i svaka tangenta na tom intervalu rastuća, iz čega zaključujemo da vrijedi $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$. Promotrimo dvije točke $x_1, x_2 \in I$ takve da je $x_1 < x_2$. Po Teoremu Lagrangea znamo da sekanta na graf kroz točke x_1 i x_2 mora biti paralelna sa tangentom na graf u nekoj točki $c \in \langle x_1, x_2 \rangle$. Obzirom da je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$, to znači da je i $f'(c) \geq 0$, pa je tangenta na graf u točki c rastuća, što znači da je sekanta na graf kroz točke x_1, x_2 također rastuća, pa je i funkcija rastuća po definiciji. Posve analogno vrijedi i za pad funkcije. Ovime smo pokazali da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 6.7 *Neka je funkcija $f : X \to Y$ derivabilna na otvorenom intervalu $I \subseteq X$. Funkcija f na intervalu I je:*

1. *monotono rastuća ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$;*
2. *monotono padajuća ako i samo ako je $f'(x) \leq 0$ za svaki $x \in I$.*

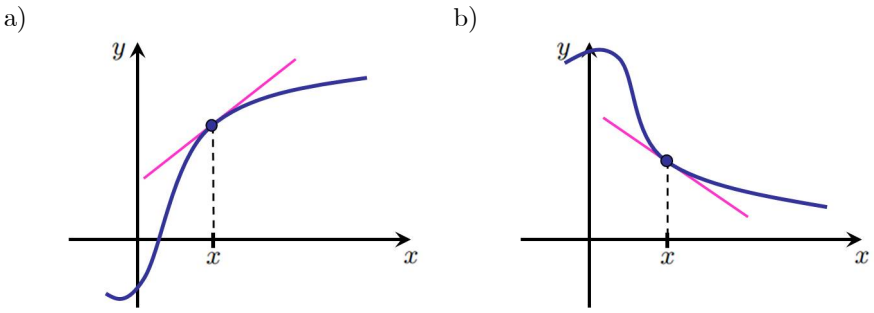
Geometrijska interpretacija ovog kriterija je sljedeća: funkcija f je monotono rastuća (padajuća) na intervalu I ako i samo ako je svaka tangenta rastuća (padajuća). Ovo je ilustrirano Slikom 6.7.

Posljedica ovog teorema je da za neprekidno derivabilnu funkciju $f : X \to Y$ i unutarnju točku domene c vrijedi:

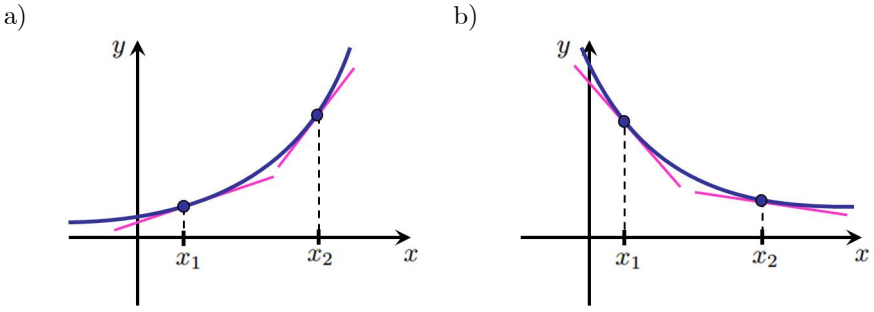
1. ako je $f'(c) > 0$, onda je funkcija f rastuća u okolini točke c;
2. ako je $f'(c) < 0$, onda je funkcija f padajuća u okolini točke c.

Štoviše, što je prva derivacija $f'(c)$ po apsolutnoj vrijednosti veća, to je rast ili pad funkcije u okolini točke c strmiji (vidi Sliku 6.8). Uočimo, ako je $f'(c) = 0$, onda ništa ne znamo o monotonosti funkcije u okolini točke c, funkcija može biti monotona (i rastuća i padajuća), ali i ne mora.

Zadatak 6.8 *Ispitaj je li funkcija $f(x)$ rastuća ili padajuća u okolini točke x_0, ako je: a) $f(x) = 2x^3 - x$ i $x_0 = 1$, b) $f(x) = 2x - x^2$ i $x_0 = 2$, c) $f(x) = 12x - x^3$ i $x_0 = -2$.*



Slika 6.7: Geometrijsko značenje kriterija: a) monotonog rasta, b) monotonog pada, funkcije u okolini točke x.



Slika 6.8: Geometrijsko značenje iznosa derivacije: a) $0 < f'(x_1) < f'(x_2)$, b) $f'(x_1) < f'(x_2) < 0$.

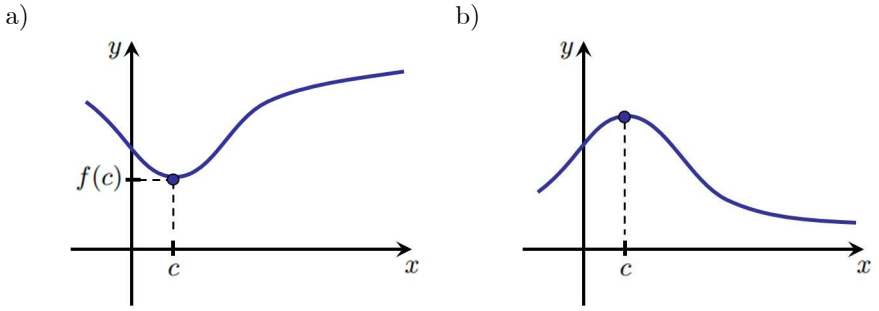
Sada želimo definirati točke lokalnog ekstrema funkcije.

Definicija 6.9 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je $c \in X$ unutarnja točka domene u kojoj je funkcija f neprekidna. Kažemo da funkcija f u točki c ima:*

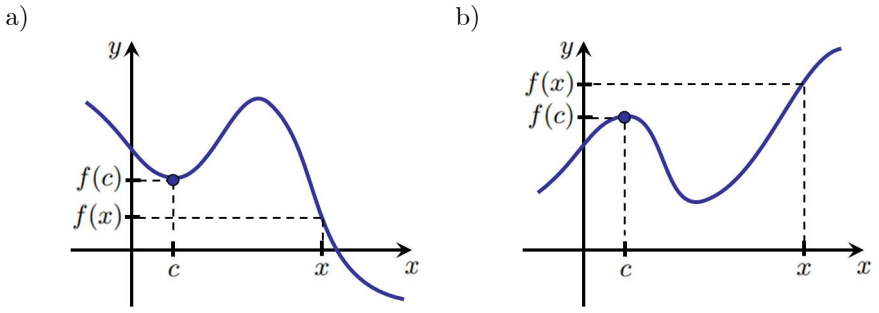
1. lokalni minimum $f(c)$ *ako postoji otvorena okolina* I *točke* c *takva da je* $f(c) < f(x)$ *za svaki* $x \in I \backslash \{c\}$,
2. lokalni maksimum $f(c)$ *ako postoji otvorena okolina* I *točke* c *takva da je* $f(c) > f(x)$ *za svaki* $x \in I \backslash \{c\}$.

Ako funkcija u točki c *ima lokalni minimum ili maksimum, onda kažemo još i da funkcija* f *ima* lokalni ekstrem *u točki* c.

Ilustracija lokalnog minumuma i maksimuma prikazana je na Slici 6.9. Uočimo da lokani minimum ne mora biti i globalni minimum, tj. može postojati točka x dovoljno daleko od točke minimuma c u kojoj funkcija ima manju vrijednost nego u točki c. Posve analogno, lokalni maksimum ne mora biti globalni maksimum. Ova činjenica ilustrirana je na Slici 6.10.



Slika 6.9: Geometrijsko značenje: a) lokalnog minimuma, b) lokalnog maksimuma.



Slika 6.10: Uočimo da: a) lokalni minimum ne mora biti globalni, b) lokalni maksimum ne mora biti globalni.

Sada želimo pronaći kriterije za utvrđivanje postojanja ekstrema u nekoj točki domene funkcije. U tu svrhu potreban nam je najprije pojam kritične točke funkcije.

Definicija 6.10 *Neka je* $f : X \to Y$ *funkcija, te neka je* $c \in X$ *unutarnja točka domene u kojoj je funkcija* f *neprekidna. Kažemo da je* c kritična točka *funkcije* f *ako je* $f'(c) = 0$ *ili ako* $f'(c)$ *ne postoji. Kritične točke u kojima je* $f'(c) = 0$ *zovu se još i* stacionarne točke.

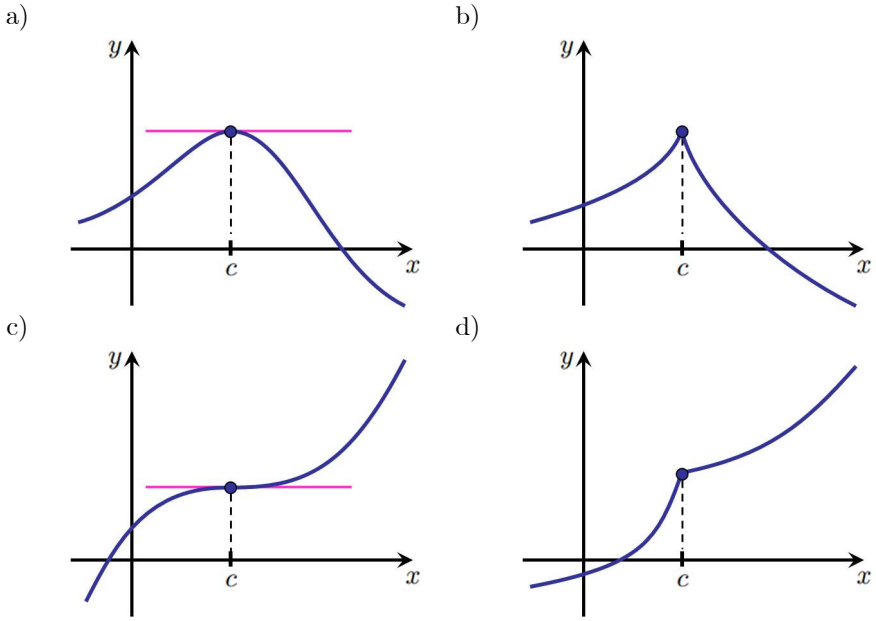
Geometrijska interpretacija kritične točke je sljedeća: unutarnja točka c domene je kritična ako je tangenta na graf u točki c vodoravna ili ne postoji. Sada vrijedi sljedeći teorem

Teorem 6.11 (Nužan uvjet postojanja ekstrema) *Neka je $f : X \to Y$ funkcija, te neka je $c \in X$ unutarnja točka domene u kojoj je funkcija f neprekidna. Ako funkcija f ima lokalni ekstrem u točki c, onda je c kritična točka funkcije f.*

Uočimo da je uvjet iz prethodnog teorema nužan za postojanje ekstrema, ali ne i dovoljan. Drugim riječima, ako funkcija f ima ekstrem u točki c, onda je c kritična točka funkcije. No obrat općenito ne vrijedi, tj. ako je c kritična točka funkcije, to ne znači da funkcija f ima u točki c ekstrem (može ga imati, ali i ne mora). Obzirom na geometrijsku interpretaciju kritične točke, možemo reći:

1. ako je c točka ekstrema funkcije, onda je tangenta na graf u točki c vodoravna ili ne postoji;
2. ako je tangenta na graf u točki c vodoravna ili ne postoji, to ne znači da je točka c sigurno točka ekstrema funkcije.

Geometrijska ilustracija Teorema o nužnom uvjetu postojanja ekstrema prikazana je na Slici 6.11.



Slika 6.11: Ako je c točka ekstrema funkcije, onda je tangenta na graf funkcije u točki c : a) vodoravna ili b) ne postoji. S druge strane, ako je u točki c tangenta na graf: c) vodoravna ili d) ne postoji, to ne znači da je c točka ekstrema funkcije.

Teorem 6.12 (Prvi dovoljan uvjet postojanja ekstrema) *Neka je $f : X \to Y$ funkcija, te neka je $c \in X$ unutarnja točka domene u kojoj je funkcija f neprekidna. Neka je pri tom funkcija*

f derivabilna u okolini točke c osim eventualno u samoj točki c. Ako prva derivacija f' mijenja predznak u c, onda funkcija f ima lokalni ekstrem u točki c, i to:

1. *lokalni minimum ako f' mijenja predznak iz $"-"$ u $"+"$,*

2. *lokalni maksimum ako f' mijenja predznak iz $"+"$ u $"-"$.*

Neformalnije rečeno, dovoljan uvjet iz prethodnog teorema znači sljedeće: u točki c će biti lokalni minimum, ako funkcija prije točke c pada ($f'(x) < 0$), a nakon točke c raste ($f'(x) > 0$). Nadalje, u točki c će biti lokalni maksimum, ako funkcija prije točke c raste ($f'(x) > 0$), a nakon točke c pada ($f'(x) < 0$).

Teorem 6.13 (Drugi dovoljan uvjet postojanja ekstrema) *Neka je funkcija $f : X \to Y$ dva puta derivabilna u stacionarnoj točki $c \in X$. Ako je $f''(c) \neq 0$, onda funkcija f ima lokalni ekstrem $f(c)$ u točki c, i to:*

1. *lokalni minimum ako je $f''(c) > 0$,*

2. *lokalni maksimum ako je $f''(c) < 0$.*

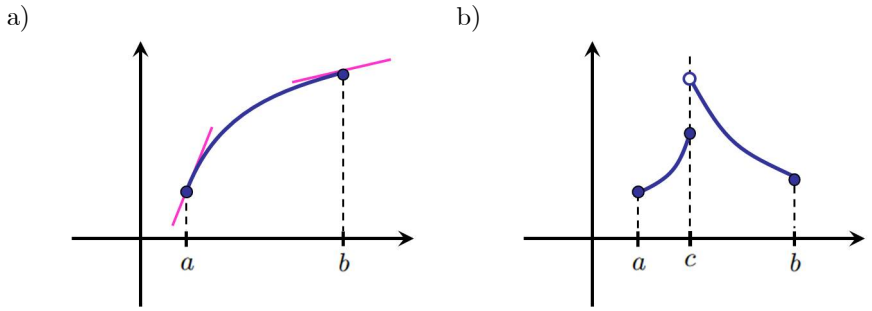
U sljedećem poglavlju uvest ćemo kriterije za konkavnost i konveksnost funkcije u okolini neke točke. Obzirom na te uvjete, ovdje možemo unaprijed neformalnije reći da ovaj dovoljan uvjet znači sljedeće: u stacionarnoj točki c će biti lokalni minimum, ako je funkcija u točki c konveksna ($f''(c) > 0$). Nadalje, u stacionarnoj točki c će biti lokalni maksimum, ako je funkcija u točki c konkavna ($f''(c) < 0$).

Zadatak 6.14 *Odredi lokalne ekstreme funkcije $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ po prvom dovoljnom uvjetu za postojanje ekstrema.*

Zadatak 6.15 *Odredi lokalne ekstreme funkcije $f(x) = 12x + 3x^2 - 2x^3$ po drugom dovoljnom uvjetu za postojanje ekstrema.*

Zadatak 6.16 *Ispitaj ima li funkcija $f(x)$ ekstrem u točki x_0 ako je: a) $f(x) = x^3 - 4x$ i $x_0 = 2$, b) $f(x) = 3x^2 - x^3$ i $x_0 = 2$, c) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x$ i $x_0 = 3$.*

Prokomentirajmo za kraj pitanje zašto smo se u razmatranju ekstrema ograničili na unutarnje točke domene u kojima je funkcija neprekidna. Razlog takvom ograničenju nije to što pojam ekstrema na rubovima domene ili u točkama prekida fizikalno nema smisla, nego zato što kriteriji koje razvijamo (nužan i dovoljan uvjet za postojanje ekstrema) u takvim točkama općenito ne vrijede. Primjer da nužan uvjet ne mora vrijediti na rubovima domene ilustriran je Slikom 6.12 a), dok je primjer da dovoljan uvjet ne mora vrijediti u točkama prekida ilustriran Slikom 6.12 b). Dakle, kad se modeliraju različite fizikalne pojave, onda se postojanje ekstrema na rubovima i u točkama prekida mora posebno provjeravati.



Slika 6.12: Uočimo da: a) nužan uvjet postojanja ekstrema općenito ne vrijedi na rubovima domene, b) dovoljan uvjet postojanja ekstrema općenito ne vrijedi u točkama prekida funkcije.

6.3 Zakrivljenost

U poglavlju o svojstvima funkcija uveli smo pojam zakrivljenosti (konveksnost i konkavnost), te uočili da konveksnost funkcije na intervalu znači da je odsječak svake sekante iznad grafa funkcije, a konkavnost funkcije na intervalu znači da je odsječak svake sekante ispod grafa funkcije. Slično kao kod monotonosti, sada pojam zakrivljenosti možemo povezati sa derivacijom funkcije f, samo ovaj put derivacijom drugog reda.

Teorem 6.17 *Neka je funkcija $f : X \to Y$ dvaput derivabilna na otvorenom intervalu $I \subseteq X$. Funkcija f na intervalu I je:*

1. *konveksna ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$;*
2. *konkavna ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$ za svaki $x \in I$.*

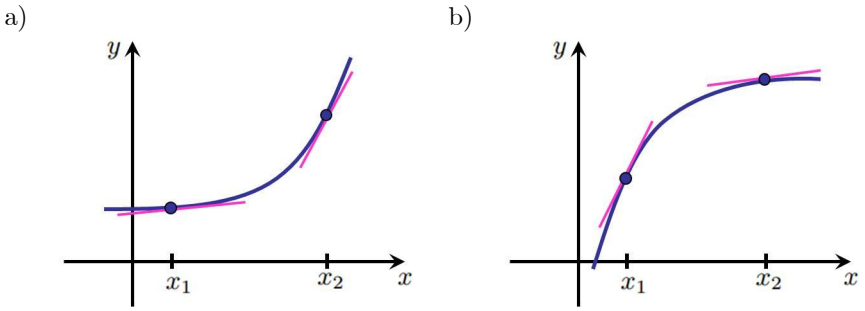
Geometrijsko značenje ovog kriterija konveksnosti funkcije na intervalu je da koeficijent smjera tangente raste (tj. funkcija f' je rastuća), a konkavnosti da koeficijent smjera tangente opada (tj. funkcija f' je padajuća), što je ilustrirano Slikom 6.13. Posljedica ovog teorema je da za dvaput neprekidno derivabilnu funkciju $f : X \to Y$ i unutarnju točku domene c vrijedi:

1. ako je $f''(c) > 0$, onda je funkcija f konveksna u okolini točke c,
2. ako je $f''(c) < 0$, onda je funkcija f konkavna u okolini točke c.

Ponovo, ako je $f''(c) = 0$, onda ne znamo ništa o zakrivljenosti funkcije f u okolini točke c, tj. funkcija može biti i konkavna i konveksna, ali i ne mora biti.

Zadatak 6.18 *Što znamo o monotonosti i zakrivljenosti funkcije u okolini zadane točke, ako je: a) $f(1) = 2$, $f'(1) = 2$, $f''(1) = -1$; b) $f(3) = 1$, $f'(3) = -\frac{1}{2}$, $f''(3) = 3$; c) $f(2) = 2$, $f'(2) = 0$, $f''(2) = -2$; d) $f(2) = 1$, $f'(2) = 1$, $f''(2) = 2$. Skiciraj izgled funkcije u okolini zadane točke.*

Zadatak 6.19 *Ispitaj monotonost i zakrivljenost funkcije $f(x)$ u točki x_0, za: a) $f(x) = 4x - x^3$ i $x_0 = 1$, b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 12$ i $x_0 = 2$, c) $f(x) = (x-1)^3$ i $x_0 = 1$.*

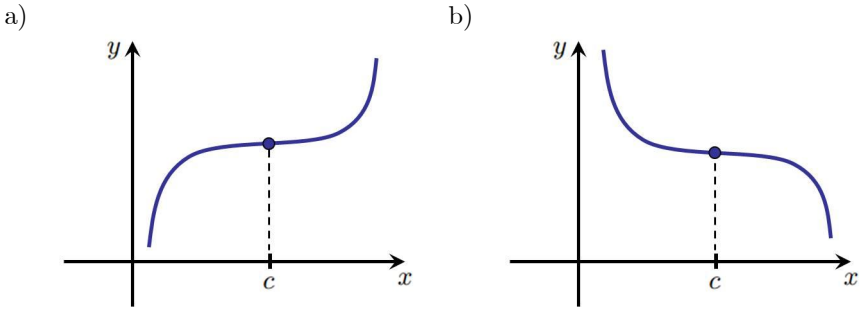


Slika 6.13: Geometrijsko značenje kriterija: a) konveksnosti, b) konkavnosti funkcije na intervalu.

Sada želimo definirati točke u kojima se zakrivljenost mijenja, po uzoru na ekstreme koji su točke u kojima se monotonost mijenja.

Definicija 6.20 *Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je $c \in X$ unutarnja točka domene u kojoj je funkcija f neprekidna. Kažemo da je c* točka infleksije *ako postoji lijeva okolina točke c na kojoj je funkcija strogo konkavna, te desna na kojoj je strogo konveksna, ili obratno.*

Ilustracija pojma infleksije prikazana je na Slici 6.14. Slično kao kod ekstrema, uvodimo nužan i dovoljan uvjet postojanja infleksije u točki.



Slika 6.14: Geometrijsko značenje točaka infleksije.

Teorem 6.21 (Nužan uvjet postojanja infleksije) *Neka je $f : X \to Y$ funkcija, te neka je c unutarnja točka domene u kojoj je funkcija dva puta derivabilna. Ako funkcija f ima infleksiju u točki c, onda je $f''(c) = 0$.*

Uočimo da je uvjet iz prethodnog teorema nužan za postojanje infleksije, ali ne i dovoljan. Drugim riječima, ako funkcija f ima infleksiju u točki c, onda je $f''(c) = 0$. No obrat općenito ne vrijedi, tj. ako je $f''(c) = 0$, to ne znači da funkcija f sigurno ima infleksiju u točki c. Primjer za to je funkcija $f(x) = x^4$ za koju u točki $c = 0$ vrijedi $f''(c) = 0$, ali u $c = 0$ funkcija ipak nema točku infleksije.

Teorem 6.22 (Dovoljan uvjet postojanja infleksije) *Neka je $f : X \to Y$ funkcija, te neka je c unutarnja točka domene u kojoj je funkcija dva puta derivabilna. Ako f'' mijenja predznak u točki c, onda funkcija f ima infleksiju u točki c.*

Neformalnije se može reći da dovoljan uvjet postojanja infleksije znači sljedeće: funkcija će u točki c imati infleksiju: ako je funkcija prije točke c konkavna, a poslije konveksna, ili obratno - ako je prije točke c funkcija konveksna, a poslije konkavna (vidi Sliku 6.14).

Zadatak 6.23 *Odredi točke ekstrema i infleksije za $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$.*

Poglavlje 7

Nizovi i redovi

7.1 Nizovi brojeva

Intuitivno, niz realnih brojeva je

$$2, \frac{3}{5}, -4, \frac{1}{2}, 7, \sqrt{2}, 3, 3, \frac{45}{7}, \ldots$$

Možemo smatrati da je niz nastao tako što smo svakom mjestu u nizu (prvo, drugo, treće, ...) pridružili po jedan realni broj ($2, \frac{3}{5}, -4, \ldots$). Dakle, možemo uvesti sljedeću formalnu definiciju.

Definicija 7.1 *Niz realnih brojeva je svaka funkcija* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Ako je $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ neki niz realnih brojeva, onda se funkcijska vrijednost $a(n)$ označava još i sa a_n i naziva $n-$ti član niza. Niz se najčešće zadaje zadavanjem analitičke formule za a_n, a cijeli niz se tada označava sa $\{a_n\}$. Primjerice, sa $a_n = \frac{1}{n}$ zadan je niz

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots,$$

dok je sa $a_n = 2^n$ zadan niz

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

Obzirom da je niz realna funkcija realne varijable, kažemo da je niz omeđen (odnosno monotono rastući ili padajući) ako je kao funkcija omeđen (odnosno rastući ili padajući).

Definicija 7.2 *Kažemo da je niz realnih brojeva stacionaran, ako su od nekog mjesta u nizu pa nadalje svi članovi niza međusobno jednaki.*

Primjerice, sa

$$a_n = \begin{cases} 2n, & \text{za } n \leq 4 \\ 5, & \text{za } n > 4 \end{cases}$$

zadan je stacionarni niz realnih brojeva

$$2, 4, 6, 8, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots, 5, \ldots$$

Definicija 7.3 *Kažemo da je niz realnih brojeva alternirani, ako su svaka dva susjedna člana u nizu suprotnog predznaka.*

Primjerice, sa $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ zadan je alternirani niz

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$$

Zadatak 7.4 *Zadani su nizovi: a) $a_n = n+(-1)^n$, b) $a_n = (\frac{1}{2})^n$, c) $a_n = \sin(n\pi)$, d) $a_n = \cos(n\pi)$. Napiši nekoliko prvih članova niza, odgovori je li niz ograničen, monoton, stacionaran ili alternirani.*

Najčešće će nas zanimati limes niza. Obzirom da je limes definiran samo u točkama gomilišta domene, a niz ima za domenu skup $\mathbb{N}$ čije je jedino gomilište $+\infty$, pod limesom niza a_n smatrat ćemo uvijek limes

$$\lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Definicija 7.5 *Kažemo da niz $\{a_n\}$:*

1. *konvergira prema $L \in \mathbb{R}$, ako vrijedi $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$,*
2. *divergira prema $+\infty$ (ili $-\infty$), ako vrijedi $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (ili $\lim_{n\to+\infty} = -\infty$),*
3. *divergira, ako limes $\lim_{n\to+\infty} a_n$ ne postoji.*

Zbog jedinstvenosti terminologije u daljnjem izlaganju, u slučaju kad je $\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$ govorit ćemo i da niz konvergira prema $\pm\infty$. Obzirom da je niz realnih brojeva zapravo realna funkcija realne varijable, onda za limes niza vrijede sva svojstva koja smo uveli u poglavlju o limesima funkcija.

Također, ako se niz $\{a_n\}$ može proširiti do neprekidne funkcije koja u $+\infty$ ima limes $L \in \mathbb{R}$, onda i niz $\{a_n\}$ konvergira prema L. Kod određivanja limesa funkcije koja proširuje niz možemo primijeniti tehnike za nalaženje limesa funkcija realne varijable (logaritamsko deriviranje, L'Hospitalovo pravilo , ...).

Zadatak 7.6 *Proširenjem po neprekidnosti pokaži da vrijedi:*

$$a)\ \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e,\ b)\ \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1,\ c)\ \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a} = 1\ (za\ a > 0).$$

7.2 Redovi brojeva

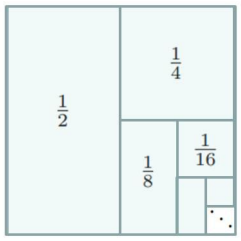
U prethodnom poglavlju uveli smo (beskonačne) nizove realnih brojeva. U ovom poglavlju razmatrat ćemo pitanje sume svih članova takvih nizova.

Definicija 7.7 *Neka je $\{a_n\}$ niz realnih brojeva. Red realnih brojeva $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je zbroj svih članova niza $\{a_n\}$.*

Prirodno se nameće pitanje - pa zar nije suma beskonačno mnogo (pozitivnih) članova niza uvijek jednaka beskonačno? Vrlo jednostavno se može pokazati da to nije slučaj. Naime, za članove niza $a_n = \frac{1}{2^n}$ vrijedi

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$$

što se lako vidi ako uočimo da članovi niza predstavljaju djelove površine kvadata sa stranicom duljine jedan (vidi Sliku 7.1). Dakle, suma nekih redova može biti konačan broj, pa ćemo za takve redove govoriti da su *sumabilni* ili *zbrojivi* ili još *konvergentni*. Uvedimo sada formalno definiciju konvergentnog reda.



Slika 7.1: Geometrijsko značenje reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$: suma je jednaka površini kvadrata čija stranica je duljine 1.

Definicija 7.8 *Neka je $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ red realnih brojeva. Broj $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ naziva se $k-$ta parcijalna suma reda. Niz $\{s_k\}$ naziva se niz parcijalnih suma reda.*

Definicija 7.9 *Kažemo da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan (ili zbrojiv ili sumabilan), ako niz parcijalnih suma $\{s_k\}$ konvergira prema konačnom broju s. Broj s se naziva sumom reda.*

Primjerice, vrijedi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1)^n = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \Rightarrow \{s_k\} = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, k, \ldots \to +\infty$$

pa red $\sum_{n=1}^{+\infty} (1)^n$ nije zbrojiv, dok s druge strane vrijedi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \Rightarrow \{s_k\} = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots, \frac{2^k - 1}{2^k}, \ldots \to 1$$

pa red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ jest zbrojiv i zbroj mu je jednak jedan.

Zadatak 7.10 *Ispitaj konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.*

Često se koriste tzv. harmonijski i geometrijski red, pa uvedimo njihovu definiciju.

Definicija 7.11 *Harmonijski red je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Geometrijski red je red $\sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot q^n$, pri čemu su $a, q \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$.*

Uočimo da kod geometrijskog reda suma počinje od $n = 0$. To nije protivno definiciji reda, jer vrijedi $\sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot q^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a \cdot q^{n-1}$.

Zadatak 7.12 *Ispitaj konvergenciju: a) harmonijskog reda, b) geometrijskog reda.*

Dakle, geometrijski red je konvergentan za $|q| < 1$ i vrijedi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q},$$

dok je za $|q| \geq 1$ geometrijski red divergentan. Naravno, sada kad smo uočili da neki redovi mogu biti zbrojivi, zanima nas utvrditi nužne i dovoljne uvjete da red bude zbrojiv, tj. da suma reda bude konačan broj.

Teorem 7.13 (Nužan uvjet konvergencije reda) *Ako je red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan, onda je $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.*

Ovaj teorem se može izreći ekvivalentno sa: ako je $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, onda je red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan. Međutim, ako je $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, onda red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ može ali i ne mora biti konvergentan. Primjerice, za red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \text{ je divergentan}$$

Međutim, vrijedi

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= 0 \text{ i } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} &= 0 \text{ i } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ je divergentan.} \end{aligned}$$

Sada želimo utvrditi dovoljne uvjete konvergencije reda, tzv. kriterije konvergencije. U tu svrhu najprije nam je potreban pojam minorante i majorante reda.

Definicija 7.14 *Neka su $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ redovi realnih brojeva s pozitivnim članovima. Ako od nekog mjesta u nizu vrijedi $a_n \leq b_n$, onda kažemo da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ majoranta reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, dok je red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ minoranta reda $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.*

Zadatak 7.15 *Zadani su redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Za svaki red utvrdi je li minoranta ili majoranta preostala dva reda.*

Teorem 7.16 (Kriteriji konvergencije reda) *Neka su $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ redovi realnih brojeva sa pozitivnim članovima. Tada vrijede sljedeći kriteriji konvergencije.*

1. *Poredbeni kriterij I. Red je konvergentan ako ima konvergentnu majorantu, a divergentan ako ima divergentnu minorantu.*

2. *Poredbeni kriterij II. Neka je*
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=L.$$
Ako je $0<L<+\infty$, *onda oba reda konvergiraju ili oba reda divergiraju.*

3. *D'Alambertov kriterij. Neka je*
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L.$$
Ako je $L<1$ *onda red* $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ *konvergira, ako je* $L>1$ *onda red* $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ *divergira, a ako je* $L=1$ *onda ovaj kriterij ne daje odluku.*

4. *Cauchyjev kriterij. Neka je*
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=L.$$
Ako je $L<1$ *onda red* $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ *konvergira, ako je* $L>1$ *onda red* $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ *divergira, a ako je* $L=1$ *onda ovaj kriterij ne daje odluku.*

5. *Leibnizov kriterij. Ako za red* $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ *vrijedi* $a_1\geq a_2\geq a_3\geq\ldots\geq a_n\geq\ldots$ *(tj. niz* a_n *je padajući) i vrijedi*
$$\lim_{n\to+\infty}a_n=0,$$
onda je red $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ *konvergentan.*

Uočimo da nam prva četiri kriterija iz prethodnog teorema daju uvjet konvergencije za redove s pozitivnim članovima, dok nam Leibnizov kriterij daje uvjet konvergencije alterniranog reda (tj. reda koji je suma alterniranog niza).

Zadatak 7.17 *Ispitaj konvergenciju redova:*

$$\begin{array}{lll} a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}, & b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}, & c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{2^n-3},\\ d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}, & e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n3^n}{2^n}, & f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}. \end{array}$$

Ako red sadrži i pozitivne i negativne članove, a nije alternirani, onda se na njega ne može primijeniti ni jedan od kriterija iz Teorema 7.16. U tom slučaju su nam od koristi sljedeća definicija i teorem.

Definicija 7.18 *Kažemo da je red* $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ *apsolutno konvergentan, ako je red* $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ *konvergentan.*

Teorem 7.19 *Ako je red* $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ *apsolutno konvergentan, onda je red* $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ *ujedno i konvergentan.*

Obrat prethodnog teorema ne vrijedi, tj. postoje redovi s negativnim članovima koji su konvergentni, ali koji nisu apsolutno konvergentni. Za takve redove kažemo da su uvjetno konvergentni. Naravno, ovaj kriterij konvergencije se može primijeniti i na alternirane redove.

Zadatak 7.20 *Ispitaj apsolutnu konvergenciju redova: a)* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$, *b)* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

7.3 Nizovi i redovi funkcija

Neka je $f_n : D_n \to \mathbb{R}$ funkcija za svaki $n \in \mathbb{N}$. Niz funkcija je niz

$$f_1,\ f_2,\ f_3, \ldots,\ f_n, \ldots = \{f_n\}.$$

Ako se realni broj x nalazi u domeni svake funkcije f_n, onda uvrštavanjem tog x u niz funkcija dobivamo niz brojeva

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots = \{f_n(x)\},$$

a suma tog niza brojeva je red brojeva

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Skup svih takvih redova brojeva naziva se red funkcija i označava sa $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Definicija 7.21 *Neka je $f_n : D_n \to \mathbb{R}$ funkcija za svaki $n \in \mathbb{N}$, te neka je $D = \cap_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Red funkcija $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ je skup svih redova brojeva*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \text{ za } x \in D.$$

Skup D naziva se područje definicije ili domena reda funkcija.

Primjerice, sa $f_n(x) = x^n$ za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je zadan niz funkcija

$$\{x^n\} = 1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots.$$

Domena svake funkcije u nizu je cijeli skup $\mathbb{R}$, pa je područje definicije reda funkcija

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

cijeli skup $\mathbb{R}$. Sada u taj red funkcija možemo uvrštavati bilo koji $x \in \mathbb{R}$ i dobivati redove brojeva. Primjerice, vrijedi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \begin{cases} 1+1+1+1+\ldots & \text{za } x = 1 \\ 1+2+4+8+\ldots & \text{za } x = 2 \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots & \text{za } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Definicija 7.22 *Neka je $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ red funkcija i D njegovo područje definicije. Područje konvergencije reda funkcija $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ je skup svih $x \in D$ za koje red brojeva $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konvergira.*

Na području konvergencije reda funkcija $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ može se definirati funkcija s pravilom

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Ovako definirana funkcija naziva se sumom reda funkcija $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Dakle, ispitivanje konvergencije reda funkcija $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ svodi se na određivanje područja konvergencije reda (tj. svih $x \in \mathbb{R}$ za koje red brojeva $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konvergira), te na određivanje funkcije $s(x)$ na tom području.

Zadatak 7.23 *Ispitaj konvergenciju reda funkcija $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.*

7.4 Red potencija

Posebno važnu ulogu u raznim primjenama ima tzv. red potencije, tj. red koji se dobije sumiranjem funkcija

$$f_n(x) = a_n(x - x_0)^n \text{ za } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Dakle, red potencija je red oblika

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

pri čemu je $x_0 \in \mathbb{R}$, te $a_n \in \mathbb{R}$ za svaki indeks $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Brojevi a_n nazivaju se koeficijenti reda potencija.

Definicija 7.24 *Radijus konvergencije reda potencija* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ *je broj* R *za kojeg vrijedi*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ ili } \frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Posebno, ako su ovi limesi jednaki $+\infty$ onda je $R = 0$, a ako su jednaki 0 onda je $R = +\infty$.

Teorem 7.25 (Kriterij konvergencije reda potencija) *Ako je* R *radijus konvergencije reda* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$, *onda taj red konvergira za svaki* x *za koji je* $|x - x_0| < R$, *divergira za svaki* x *za koji je* $|x - x_0| > R$, *dok za* x *za koji je* $|x - x_0| = R$ *ovaj kriterij ne daje odluku.*

Dakle, prethodni teorem kaže da red potencija $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ konverira sigurno za

$$x \in \langle x_0 - R, x_0 + R \rangle,$$

te eventualno još na rubovima tog intervala gdje konvergenciju reda treba posebno ispitivati, dok za sve ostale $x \in \mathbb{R}$ red potencija divergira. Posebno, ako je $x_0 = 0$ onda red potencija poprima oblik

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

te konvergira za

$$x \in \langle -R, R \rangle$$

i još eventualno na rubovima tog intervala, pri čemu je R radijus konvergencije reda.

Zadatak 7.26 *Ispitaj konvergenciju reda potencija: a)* $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$, *b)* $\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$, *c)* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$.

7.5 Taylorov red

Teorem 7.27 *Neka je funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$ *derivabilna* $n+1$ *puta u okolini točke* x_0. *Tada za svaki* x *iz te okoline vrijedi*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

pri čemu je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

za neki $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ *gdje je* $0 < \theta < 1$.

Polinom koji aproksimira funkcijsku vrijednost $f(x)$ u prethodnom teoremu naziva se Taylorov polinom funkcije f u točki x_0, a greška aproksimacije $R_n(x)$ naziva se ostatak u Lagrangeovom obliku. Uočimo, ako niz ostataka $\{R_n(x)\}$ teži k nuli, kako n teži u $+\infty$, onda Taylorov polinom postaje red koji konvergira ka vrijednosti $f(x)$.

Teorem 7.28 *Neka je funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$ *derivabilna proizvoljno mnogo puta u okolini točke* x_0. *Tada za svaki* x *iz te okoline vrijedi*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ako i samo ako je $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

Red potencija iz prethodnog teorema naziva se Taylorov red (ili razvoj) funkcije f u točki x_0. Posebno, ako je $x_0 = 0$ onda govorimo o Maclaurinovom redu (ili razvoju) funkcije f koji je oblika

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Uočimo, Taylorov i Maclaurinov red su redovi potencija, pa područje konvergencije tih redova možemo određivati po Teoremu 7.25, a na pitanje što je suma tog reda odgovor daje Teorem 7.28

Zadatak 7.29 *Razvij u Maclaurinov red funkcije: a)* $f(x) = e^x$, *b)* $f(x) = \cos x$, *c)* $f(x) = \sin x$. *Odredi područje konvergencije tih redova.*

Zadatak 7.30 *Obrazloži zašto pišemo* $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ *kod prikaza kompleksnih brojeva.*

Poglavlje 8

Neodređeni integral

8.1 Definicija neodređenog integrala

Motivacija iza definiranja pojma neodređeni integral je obrtanje postupka deriviranja. Naime, postupkom deriviranja se za zadanu funkciju utvrđuje njena derivacija. Integriranje je postupak kojim ćemo za zadanu derivaciju utvrđivati funkciju čija je to derivacija. Zato se integriranje ponekad naziva i antideriviranje.

Definicija 8.1 *Primitivna funkcija funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in I$.*

Primitivna funkcija zadane funkcije se naziva još i antiderivacija. Neka je zadana funkcija $f(x) = 2x$, a želimo utvrditi njenu primitivnu funkciju. Ako se sjetimo da je primitivna funkcija ona funkcija koja u deriviranju daje $f(x)$, onda vidimo da je

$$F(x) = x^2,\ F(x) = x^2 + 1,\ F(x) = x^2 - \frac{1}{2}, \dots$$

Dakle, primitivna funkcija nije jedinstvena, nego postoji cijelo mnoštvo primitivnih funkcija za zadanu funkciju $f(x)$. Uočimo da sve ove funkcije imaju isti varijabilni dio, a razlikuju se u konstanti.

Teorem 8.2 *Neka su $F : I \to \mathbb{R}$ i $G : I \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$. Tada vrijedi $F(x) - G(x) = C$ za svaki $x \in I$, pri čemu je C konstanta.*

Neformalnije kažemo još da se dvije primitivne funkcije razlikuju do na aditivnu konstantu.

Definicija 8.3 *Neodređeni integral funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je skup svih primitivnih funkcija funkcije f. Neodređeni integral označavamo sa $\int f(x)dx$.*

Za neodređeni integral često koristimo zapis

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

pri čemu funkciju f nazivamo *podintegralnom funkcijom*, x *varijablom integracije*, a C *konstantom integracije*. Postupak određivanja integrala naziva se *integriranje*.

Dakle, ako je zadana funkcija $f(x)$ i želimo utvrditi njenu primitivnu funkciju $F(x)$, to se radi postupkom integriranja. Obratno, ako je zadana primitivna funkcija $F(x)$ i želimo utvrditi funkciju $f(x)$ čija je to primitivna funkcija, to se radi postupkom deriviranja. Ovo se može shematski zapisati sljedećom shemom

$$f(x) \underset{\text{deriviranje}}{\overset{\text{integriranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak 8.4 *Zadana je funkcija $f(x) = \sin x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$. Kako se zove postupak kojim određujemo funkciju $F(x)$? Je li funkcija $F(x)$ jedinstvena?*

Zadatak 8.5 *Zadana je primitivna funkcija $F(x) = e^{2x}$. Odredi funkciju $f(x)$ čija je to primitivna funkcija. Kako se zove postupak kojim određujemo funkciju $f(x)$? Je li funkcija $f(x)$ jedinstvena?*

8.2 Integriranje elementarnih funkcija

Pri integriranju elementarnih funkcija koristi se struktura klase elementarnih funkcija. Naime, općenita elementarna funkcija nastaje:

- iz osnovnih elementarnih funkcija,
- primjenom pet računskih operacija sa funkcijama (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, kompozicija funkcija).

Obzirom na takvu strukturu, elementarne funkcije integriramo tako da:

- odredimo integrale osnovnih elementarnih funkcija,
- odredimo pravila za integriranje računskih operacija (ako se integral ponaša pravilno prema tim operacijama).

Ako uspijemo odrediti integral svih osnovnih elementarnih funkcija, te uspijemo pronaći pravilo za integriranje svih pet računskih operacija, onda ćemo znati integrirati svaku elementarnu funkciju.

Integriranje osnovnih elementarnih funkcija. Pri određivanju integrala osnovnih elementarnih funkcija koristimo tablicu derivacija osnovnih elementarnih funkcija, te činjenicu da je integriranje postupak obrnut deriviranju. Dakle, čitanjem tablice derivacija u obrnutom smjeru dobivamo Tablicu 8.1 osnovnih integrala.

Uočimo da u Tablici osnovnih integrala nema integrala nekih osnovnih elementarnih funkcija (logaritamske funkcije, tangensa, kotangensa, arkus funkcija). Dakle, ovime nismo uspjeli odrediti integral svih osnovnih elementarnih funkcija.

Pravila za integriranje računskih operacija. Želimo pronaći pravila (ako postoje) za integriranje funkcija koje nastaju jednom od pet računskih operacija sa funkcijama (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i kompozicija funkcija). Može se pokazati da vijedi sljedeći teorem.

Teorem 8.6 *Vrijedi:*

1. $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$,

$\int \frac{\mathrm{dx}}{x} = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
$\int x^r \,\mathrm{dx} = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ (za $r \neq -1$)	$\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$
$\int e^x \,\mathrm{dx} = e^x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\int a^x \,\mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert$
$\int \sin x \,\mathrm{dx} = -\cos x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert$
$\int \cos x \,\mathrm{dx} = \sin x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert$
$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$

Tablica 8.1: Tablica integrala (konstanta integracije je izostavljena radi jednostavnosti zapisa).

2. $\int c \cdot f(x)dx = c\int f(x)dx$ *pri čemu je* c *konstanta.*

Zadatak 8.7 *Odredi: a)* $\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx$, *b)* $\int \frac{2}{x}dx$, *c)* $\int (x-3e^x)\,dx$.

Uočimo ponovo da ovime nismo odredili pravilo za svih pet računskih operacija, jer nedostaje pravilo za integriranje množenja, dijeljenja i kompozicije funkcija. Naime, integral tih računskih operacija se naprosto ne ponaša pravilno, pa zato nema pravila za te operacije.

Integriranje elementarnih funkcija. Obzirom da nismo odredili:

- integral svih osnovnih elementarnih funkcija (u tablici nedostaju integrali logaritamske funkcije, tangensa, kotangensa, te arkus funkcija),
- pravila za svih pet računskih operacija (nedostaju pravila za množenje, dijeljenje i kompoziciju funkcija),

to znači da pomoću tablice i pravila ne možemo integrirati sve elementarne funkcije, nego samo neke. Integrali osnovnih elementarnih funkcija koji nedostaju u tablici se mogu odrediti, no pravila koja nedostaju se ne mogu u potpunosti nadomjestiti. Posljedica je da ne znamo integrirati sve elementarne funkcije, a čak i kad znamo postupak određivanja integrala može biti jako složen. Shematski je problematika integriranja elementarnih funkcija sažeto prikazana u Tablici 8.2.

Još jedan problem koji nastaje kod integriranja je to što primitivna funkcija nekih elementarnih funkcija nije elementarna. Ako je primitivna funkcija elementarne funkcije $f(x)$ i sama elementarna funkcija, onda kažemo da je integral $\int f(x)dx$ elementarno rješiv. Ako primitivna funkcija elementarne funkcije $f(x)$ nije elementarna funkcija, onda kažemo da je integral $\int f(x)dx$ elementarno nerješiv. Primjeri elementarno nerješivih integrala su

$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int e^{x^2}dx, \quad \int \frac{1}{\ln x}dx.$$

	Elementarne funkcije	
Struktura	osnovne elementarne funkcije	računske operacije
Integriranje	tablica osnovnih integrala	pravila integriranja
Problemi	u tablici nedostaju integrali nekih osnovnih elementarnih funkcija	nedostaju pravila za 3 operacije
Rješavanje problema	problem se može potpuno riješiti	problem se djelomično zaobilazi metodama integriranja

Tablica 8.2: Shematski prikaz problematike integriranja elementarnih funkcija.

8.3 Metode integriranja

Kod integriranja elementarnih funkcija nedostaju pravila za tri od pet računskih operacija (množenje, dijeljenje i kompozicija funkcija). To ima za posljedicu da ne znamo odrediti integral svih elementarnih funkcija. Nedostatak pravila za tri računske operacije se djelomično zaobilazi razvijanjem raznih metoda integracije pomoću kojih se može odrediti integral elementarnih funkcija koje nastaju pomoću tih triju operacija za koje nemamo pravila.

8.3.1 Neposredno integriranje

Iako je integriranje složen postupak, postoje integrali koji se mogu riješiti poznavanjem osnovnih integrala i svojstava neodređenog integrala. Takav postupak integriranja naziva se neposredno integriranje.

Zadatak 8.8 *Odredi: a)* $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$*, b)* $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$.

8.3.2 Metoda supstitucije

Složeniji integrali se često rješavaju jednom od dvije varijante metode supstitucije. Metoda supstitucije se provodi tako da se:

1. dopustivom zamjenom varijable integracije nekim analitičkim izrazom, ili
2. dopustivom zamjenom nekog analitičkog izraza u podintegralnoj funkciji novom varijablom,

zadani integral svede na tablični integral.

Sljedeći teorem nam kaže kako se provodi metoda supstitucije zamjenom varijable integracije nekim analitičkim izrazom.

Teorem 8.9 *Neka je* $f : I \to \mathbb{R}$ *funkcija. Neka je* J *interval, te neka su* $\varphi : J \to I$ *obostrano derivabilna bijekcija i* $g : J \to \mathbb{R}$ *funkcija takve da je*

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t)$$

za svaki $t \in J$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

onda je

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int g(t)dt = G(t) + C = \\ &= G(\varphi^{-1}(x)) + C\end{aligned}$$

Zadatak 8.10 *Izračunaj* $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$.

Iskažimo sada teorem koji nam kaže kako se metoda supstitucije provodi dopustivom zamjenom nekog analitičkog izraza u podintegralnoj funkciji novom varijablom.

Teorem 8.11 *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\psi : I \to J$ derivabilna funkcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je*

$$f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$$

za svaki $x \in I$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

onda je

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int g(\psi(x))\psi'(x)dx = \left\{ \begin{array}{c} \psi(x) = t \\ \psi'(x)dx = dt \end{array} \right\} = \int g(t)dt = G(t) + C = \\ &= G(\psi(x)) + C\end{aligned}$$

Zadatak 8.12 *Izračunaj* $\int \cos 2x \; dx$.

8.3.3 Metoda parcijalne integracije

Metoda se sastoji u tome da se odabere prikladan rastav podintegralne funkcije

$$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = \int u(x)d(v(x)),$$

te na tako napisan integral primijeni sljedeći teorem.

Teorem 8.13 *Neka su $u, v : I \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne na intervalu I. Tada vrijedi*

$$\int u(x)d(v(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x)).$$

Odabir funkcija u i v je različit od slučaja do slučaja, no pri odabiru nam može pomoći sljedeća uputa: za funkciju u obično biramo onaj dio podintegralne funkcije kojeg ne možemo integrirati, ili koji se pojednostavnjuje deriviranjem.

Zadatak 8.14 *Odredi: a)* $\int \ln x \; dx$, *b)* $\int x \sin x \; dx$.

8.3.4 Integriranje racionalnih funkcija

Neka je

$$r(x) = \frac{p_m(x)}{q_n(x)}$$

racionalna funkcija. Potrebno je odrediti njen integral, tj.

$$\int \frac{p_m(x)}{q_n(x)} dx.$$

Ako je podintegralna funkcija neprava racionalna funkcija (tj. $m \geq n$), tada se dijeljenjem polinoma u brojniku i nazivniku integral svodi na zbroj integrala polinoma i integrala prave racionalne funkcije. Obzirom da se integral polinoma može odrediti neposrednim integriranjem, problem se svodi na određivanje integrala prave racionalne funkcije.

Ako je podintegralna funkcija prava racionalna funkcija (tj. $m < n$), tada se rastavom podintegralne funkcije na parcijalne razlomke integral svodi na zbroj integrala oblika

$$\int \frac{1}{(x+a)^n} dx, \ \int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n} dx, \ \int \frac{cx+d}{(x^2+ax+b)^n} dx,$$

koji se redom rješavaju supstitucijom nazivnika, svođenjem nazivnika na potpuni kvadrat pa potom supstitucijom, te svođenjem brojnika na derivaciju nazivnika pa potom supstitucijom.

Mi ćemo se baviti uglavnom primjerima u kojima je $n = 1$, no u slučajevima kad je $n \geq 2$ za rješavanje drugog od ova tri integrala potrebna je sljedeća formula

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} \, \mathrm{dx} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \, \mathrm{dx}$$

koja se izvodi raspisivanjem brojnika u obliku $1 + x^2 - x^2$, rastavljanjem na zbroj integrala, te određivanjem jednog od integrala u zbroju parcijalnom integracijom (detalji izvoda mogu se pronaći u literaturi).

Zadatak 8.15 *Odredi: a)* $\int \frac{1}{3x-1} \, dx$, *b)* $\int \frac{1}{x^2+4x+8} \, dx$, *c)* $\int \frac{3x-2}{x^2+2x+2} \, dx$.

Zadatak 8.16 *Odredi* $\int \frac{x^4}{x^4-1} \, dx$.

8.3.5 Integriranje nekih iracionalnih funkcija

Integrali oblika

$$\int \sqrt{x^2+a^2} dx, \ \int \sqrt{x^2-a^2} dx, \ \int \sqrt{a^2-x^2} dx$$

mogu se riješiti na više načina. Jedan način je parcijalna integracija, drugi način su trigonometrijske supstitucije redom

$$x = a \operatorname{tg} t, \ x = \frac{a}{\sin t}, \ x = a \sin t.$$

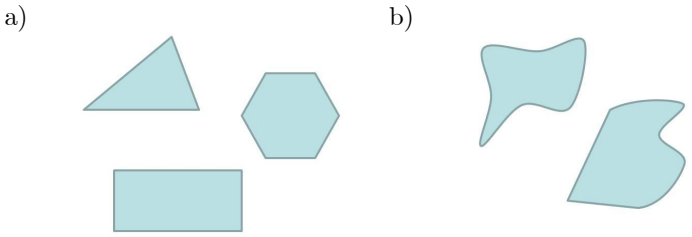
Obično je rješavanje trigonometrijskim supstitucijama složenije, osim eventualno kod trećeg integrala.

Poglavlje 9

Određeni integral

9.1 Motivacija

Motivacija iza pojma 'određenog integrala' je određivanje površine nepravilnih ravninskih likova. Pravilni ravninski likovi su trokut, pravokutnik, te pravilni mnogokuti, a nepravilni ravninski likovi su svi ostali ravninski likovi (vidi Sliku 9.1). Površinu pravilnih ravninskih likova znamo odrediti, a onda želimo odrediti i površinu nepravilnih ravninskih likova. Osnovna ideja je aproksimirati površinu nepravilnog ravninskog lika površinama pravilnih ravninskih likova.

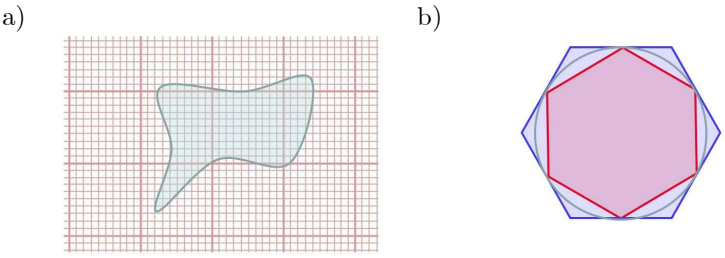


Slika 9.1: Ravninski likovi: a) pravilni, b) nepravilni.

Primjer takvog razmišljanja kojeg često susrećemo u praksi je primjerice mjerenje površine ravninskog lika milimatarskim papirom, kad položimo lik na milimetarski papir, te brojimo kvadratiće milimetarskog papira koji pokrivaju taj nepravilni ravninski lik (vidi Sliku 9.2). Time se zapravo površina nepravilnog ravninskog lika aproksimira kvadratićima koji imaju površinu 1 mm^2.

Jedan od najranijih poznatih primjera razmišljanja ove vrste je način na koji je grčki matematičar Arhimed aproksimirao površinu kruga. On je u krug upisivao pravilne mnogokute sa sve većim brojem kuteva (trokut, pa šesterokut, pa dvanaesterokut itd.) i tako dobivao sve precizniju donju granicu za površinu kruga. Isto tako, Arhimed je krugu opisivao mnogokute sa sve većim brojem kuteva i tako dobivao sve precizniju gornju granicu za površinu kruga. Dakle, Arhimed je takvim aproksimacijama uklještio nepoznatu površinu kruga između poznatih površina pravilnih mnogokuta (vidi Sliku 9.2). Nakon što je dobio željenu preciznost, Arhimed je stao. Do danas je matematika uznapredovala, pa su do danas matematičari pronašli način kako da se postupak

povećavanja broja kuteva produži u beskonačnost i tako dobije točna površina kruga (a i ostalih nepravilnih ravninskih likova).

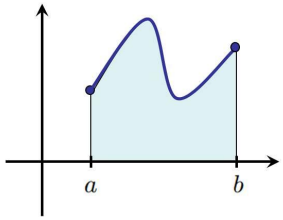


Slika 9.2: Približno određivanje površina nepravilnih ravninskih likova pomoću pravilnih: a) primjer mjerenja površine milimetarskim papirom, b) Arhimedov pristup određivanju površine kruga.

Nepravilni ravninski lik se obično zadaje kao pseudotrapez, pa definirajmo formalno taj pojam.

Definicija 9.1 *Pseudotrapez je svaki ravninski lik ispod grafa pozitivne funkcije* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *nad intervalom* $[a, b]$.

Pojam pseudotrapeza ilustriran je Slikom 9.3 U našem razmatranju mi ćemo nepavilni ravninski lik zadavati kao pseudotrapez, pa zatim razviti matematički aparat za određivanje površine pseudotrapeza.



Slika 9.3: Pseudotrapez pozitivne funkcije f nad intervalom $[a, b]$.

9.2 Darbouxov određeni integral

Definicija 9.2 *Rastav ili dekompozicija omeđenog intervala* $[a, b]$ *je svaka podjela tog intervala na podintervale.*

Rastav intervala $[a, b] \subset \mathbb{R}$ na n podintervala se najčešće zadaje tako da se zada konačan skup točaka $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ za kojeg vrijedi

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b.$$

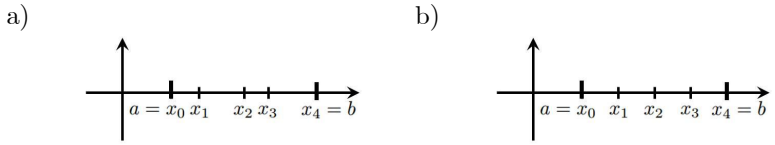
Time je interval $[a, b]$ podijeljen na podintervale $[x_{i-1}, x_i]$ za $i = 1, \ldots, n$.

Definicija 9.3 *Rastav ili dekompozicija intervala* $[a,b]$ *je ekvidistantna, ako su svi podintervali jednake širine. Širina svih podintervala ekvidistantne dekompozicije označava se sa* Δx.

Za ekvidistantni rastav intervala $[a,b]$ na n podintervala vrijedi

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Primjer jednog neekvidistantnog i (jedinog) ekvidistantnog rastava intervala $[a,b]$ na $n=4$ podintervala prikazan je na Slici 9.4.



Slika 9.4: Rastav intervala $[a,b]$ na $n=4$ podintervala: a) neekvidistantni, b) ekvidistantni.

Definicija 9.4 *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *omeđena funkcija. Neka je* $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$ *ekvidistantna dekompozicija intervala* $[a,b]$. *Tada je* $n-$ta gornja integralna suma U_n *definirana sa*

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x$$

pri čemu je $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Uočimo da gornja integralna suma aproksimira površinu pseudotrapeza pozitivne funkcije f nad intervalom $[a,b]$ sa n pravokutnika **opisanih** trapezu. Naime, geometrijska interpretacija gornje integralne sume U_n je sljedeća:

- rastavimo interval $[a,b]$ na n jednakih podintervala,
- nad svakim podintervalom konstruiramo pravokutnik koji je **opisan** psudotrapezu,
- veličina Δx predstavlja bazu, a veličina M_i visinu pravokutnika nad $i-$tim podintervalom raspodjele, što znači da umnožak $M_i \Delta x$ predstavlja površinu tog pravokutnika,
- gornja integralna suma U_n je dakle suma površina svih pravokutinika opisanih pseudotrapezu funkcije.

Ova konstrukcija ilustrirana je Slikom 9.5. Ako je P površina pseudotrapeza, uočimo da vrijedi $P \leq U_n$.

Definicija 9.5 *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *omeđena funkcija. Neka je* $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$ *ekvidistantna dekompozicija intervala* $[a,b]$. *Tada je* $n-$*ta donja integralna suma* L_n *definirana sa*

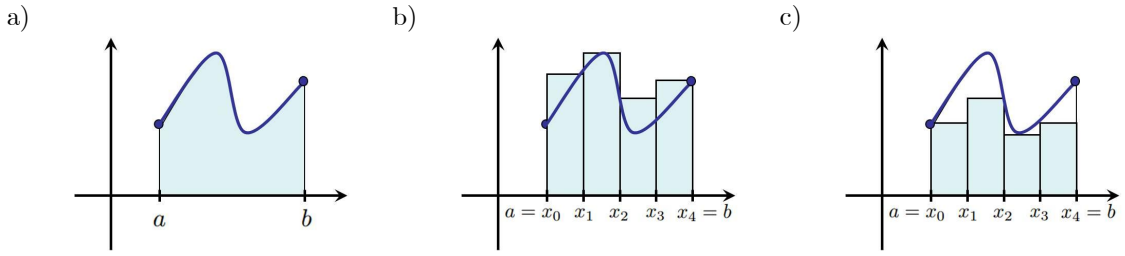
$$L_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x$$

pri čemu je $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Uočimo da gornja integralna suma aproksimira površinu pseudotrapeza pozitivne funkcije f nad intervalom $[a, b]$ sa n pravokutnika **upisanih** trapezu. Naime, geometrijska interpretacija donje integralne sume L_n je sljedeća:

- rastavimo interval $[a, b]$ na n jednakih podintervala,
- nad svakim podintervalom konstruiramo pravokutnik koji je **upisan** psudotrapezu,
- veličina Δx predstavlja bazu, a veličina m_i visinu pravokutnika nad $i-$tim podintervalom raspodjele, što znači da umnožak $M_i \Delta x$ predstavlja površinu tog pravokutnika,
- gornja integralna suma L_n je dakle suma površina svih pravokutinika upisanih pravokutniku.

Ova konstrukcija ilustrirana je Slikom 9.5. Ako je P površina pseudotrapeza, uočimo da vrijedi $P \geq L_n$. Dakle, točna površina P pseudotrapeza je uklještena između donje sume L_n i gornje sume U_n, tj. vrijedi $L_n \leq P \leq U_n$.



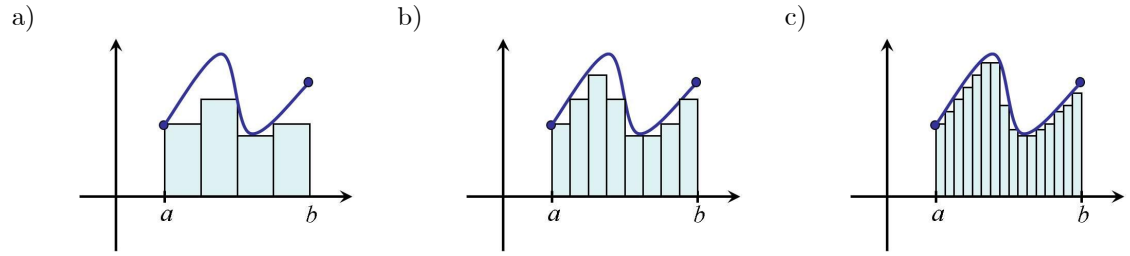
Slika 9.5: Geometrijska ilustracija: a) pseudotrapeza pozitivne funkcije f nad intervalom $[a, b]$, b) gornje integralne sume U_4, c) donje integralne sume L_4.

Zadatak 9.6 *Aproksimiraj površinu pseudotrapeza funkcije $f(x) = x^2 + 1$ nad intervalom $[0, 2]$ gornjom integralnom sumom U_3, te ilustriraj račun skicom. Istakni koliko numerički iznose, što geometrijski znače i gdje se na skici nalaze veličine M_1, Δx i $M_1 \cdot \Delta x$.*

Zadatak 9.7 *Aproksimiraj površinu pseudotrapeza funkcije $f(x) = x^2 + 1$ nad intervalom $[0, 2]$ donjom integralnom sumom L_4, te ilustriraj račun skicom. Istakni koliko numerički iznose, što geometrijski znače i gdje se na skici nalaze veličine m_3, Δx i $m_3 \cdot \Delta x$.*

Zadatak 9.8 *Aproksimiraj površinu pseudotrapeza funkcije $f(x) = x^2 + 1$ nad intervalom $[-1, 2]$ sa: a) gornjim integralnim sumama U_3 i U_6, b) donjim integralnim sumama L_3 i L_6.*

Uočimo da umnožavanjem broja podintervala u rastavu intervala $[a, b]$ dobivamo sve bolju aproksimaciju površine pseudotrapeza. Umnožavanje broja podintervala u rastavu intervala $[a, b]$ se naziva još i *profinjenje* rastava. Dakle, profinjenjem rastava gornje i donje integralne sume sve bolje aproksimiraju površinu pseudotrapeza (vidi Sliku 9.6), a savršena aproksimacija se dobiva kad širina podintervala postane "beskonačno malena", tj. infinitezimalna.



Slika 9.6: Profinjenje rastava: a) L_4, b) L_8, c) L_{16}.

Definicija 9.9 *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Kažemo da je funkcija f integrabilna, ako vrijedi*

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} L_n = I.$$

Broj I se tada naziva određenim integralom funkcije f na intervalu $[a, b]$ i označava sa $\int_a^b f(x)\,dx$.

Neformalnije rečeno, funkcija je integrabilna ako niz gonjih i niz donjih suma konvergiraju prema istom broju I. Broj I se tada naziva određenim integralom funkcije f. U slučaju kad je funkcija f pozitivna, broj I geometrijski predstavlja površinu pseudotrapeza funkcije f nad intervalom $[a, b]$. Ako je funkcija integrabilna, onda možemo pisati

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x}_{U_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x}_{L_n}.$$

Ovako definiran određeni integral se naziva još i Darbouxov određeni integral, jer je definiran pomoću Darbouxovih integralnih suma.

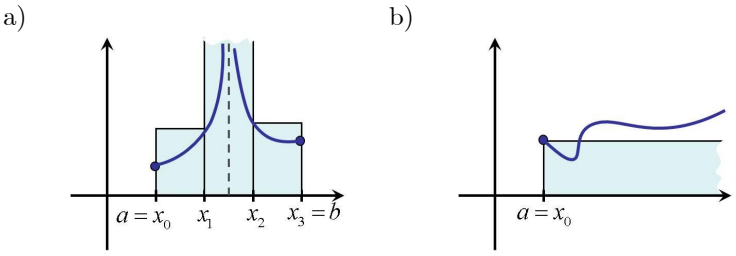
Uočimo sada da u definiciji integralnih suma postoje neka ograničenja koja je dobro malo podrobnije pojasniti.

Pitanje 9.10 *Zašto su integralne sume definirane samo za omeđene funkcije?*

Odgovor na ovo pitanje je sljedeći: neomeđene funkcije ne moraju imati supremum M_i ili infimum m_i na nekom od podintervala raspodjele. Dakle, formula za integralnu sumu koja koristi supremum M_i ili infimum m_i u tom slučaju ne bi bila valjana. Geometrijski to znači da bi površinu ispod neomeđene funkcije na nekom od podintervala trebalo aproksimirati pravokutnikom koji bi imao "beskonačnu visinu" (vidi Sliku 9.7).

Pitanje 9.11 *Zašto su integralne sume definirane samo za funkcije na omeđenim intervalima $[a, b]$?*

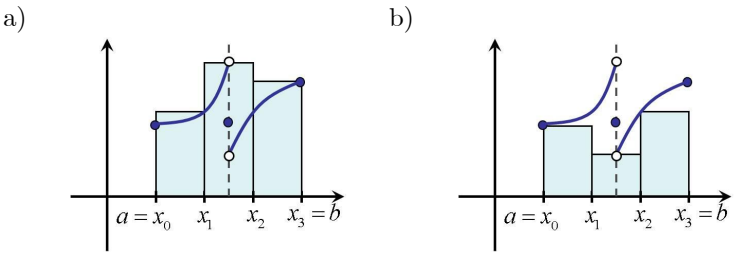
Odgovor na ovo pitanje je sljedeći: u slučaju funkcije na neomeđenom intervalu (interval "beskonačne širine", primjerice $[a, +\infty\rangle$) veličina Δx bi bila beskonačna. Geometrijski to znači da bi se površina ispod grafa takve funkcije aproksimirala pravokutnicima koji imaju "beskonačnu bazu" (vidi Sliku 9.7).



Slika 9.7: Integralne sume za: a) neomeđene funkcije, b) funkcije definirane na neomeđenom intervalu.

Pitanje 9.12 *Zašto su m_i i M_i definirani kao infimum i supremum, a ne kao minimum i maksimum?*

Odgovor na ovo pitanje je sljedeći: omeđena funkcija ne mora imati minimum i/ili maksimum na nekim podintervalima (npr. u točkama prekida), dok supremum i infimum sigurno ima. Geometrijski je to ilustrirano Slikom 9.8.



Slika 9.8: Neomeđena funkcija na nekom podintervalu ne mora imati: a) maksimum, dok supremum sigurno ima, b) minimum, dok infimum sigurno ima.

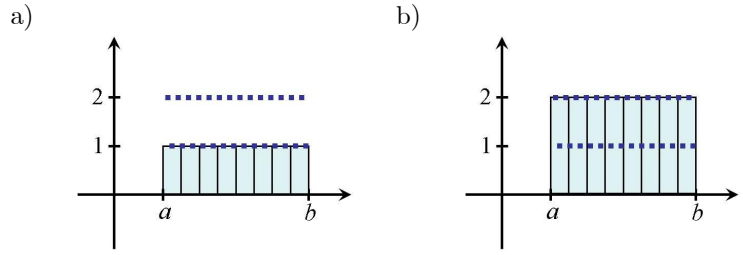
Pitanje 9.13 *Jesu li sve funkcije integrabilne?*

Odgovor na ovo pitanje je sljedeći: nisu, jer primjerice funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definirana pravilom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x \in \mathbb{Q} \\ 2 & \text{za } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

nije integrabilna, tj. niz gornjih i donjih suma ne teže istom broju I. Naime, zbog gustoće skupa $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{I}$ svaki opisani pravokutnik ima visinu 2, dok svaki upisani pravokutnik ima visinu 1, bez obzira koliko fin rastav intervala $[a, b]$ bio. Zato je

$$\left.\begin{array}{rl} \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = & 2(b-a) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} L_n = & b-a \end{array}\right\} \neq$$



Slika 9.9: Donje i gornje integralne sume za funkciju definiranu na intervalu $[a,b]$ sa $f(x)=1$ za $x\in\mathbb{Q}$ i $f(x)=2$ za $x\in\mathbb{I}$.

pa funkcija nije integrabilna (vidi Sliku 9.9).

Sada kad smo uočili da neke funkcije nisu integrabilne, prirodno se nameće pitanje kako znati je li neka funkcija integrabilna. Jedan odgovor na to pitanje dan je sljedećim teoremom.

Teorem 9.14 *Neka je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ omeđena funkcija. Ako je funkcija f neprekidna, onda je funkcija f integrabilna.*

Uočimo da je uvjet iz prethodnog teorema dovoljan uvjet, ali ne i nužan. Drugim riječima, ako je funkcija f neprekidna onda je ona sigurno integrabilna. S druge strane, ako funkcija f nije neprekidna, ona još uvijek može biti integrabilna, ali i ne mora. Obzirom da su sve elementarne funkcije neprekidne, ovaj teorem nam osigurava da su sve elementarne funkcije integrabilne.

9.3 Riemannov određeni integral

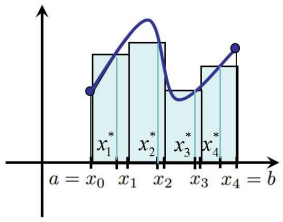
Definicija 9.15 *Neka je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ omeđena funkcija. Neka je $a=x_0\le x_1\le\ldots\le x_n=b$ ekvidistantna dekompozicija intervala $[a,b]$. Neka su $x_1^*,\ldots,x_n^*$ točke sa svojstvom $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$ za svaki $i=1,\ldots,n$. Tada je $n-$*ta Riemannova integralna suma *R_n definirana sa*

$$R_n=\sum_{i=1}^{n}f(x_i^*)\Delta x.$$

Uočimo da Riemmanova suma R_n također aproksimira površinu pseudotrapeza pozitivne funkcije f nad intervalom $[a,b]$ pravokutnicima, samo je visina svakog pravokutnika jednaka funkcijskoj vrijednosti $f(x_i^*)$ u nekoj točki x_i^* podintervala $[x_{i-1},x_i]$. Naime, geometrijska interpretacija Riemannove integralne sume R_n je sljedeća:

- rastavimo interval $[a,b]$ na n jednakih podintervala,
- nad svakim podintervalom konstruiramo pravokutnik kojemu je visina funkcijska vrijednost u nekoj točki x_i^* podintervala,
- veličina Δx predstavlja bazu, a veličina $f(x_i^*)$ visinu pravokutnika nad $i-$tim podintervalom raspodjele, što znači da umnožak $f(x_i^*)\Delta x$ predstavlja površinu tog pravokutnika,
- Riemannova integralna suma R_n je dakle suma površina svih konstruiranih pravokutnika.

Jedna Riemannova suma R_4 ilustrirana je na Slici 9.10 (inače, Riemannovih suma R_4 ima beskonačno mnogo, a dobivaju se različitim odabirom točaka x_i^*). Ponovo, aproksimacija će biti sve bolja, kako je rastav finiji, a savršena aproksimacija se dobiva kad podinterval rastava postane "beskonačno malen", tj. infinitezimalan.



Slika 9.10: Jedna Riemannova suma R_4.

Definicija 9.16 *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Kažemo da je funkcija f integrabilna po Riemannu, ako vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = I$$

neovisno o izboru točaka x_i^*. Broj I se tada naziva Riemmanovim integralom funkcije f na intervalu $[a, b]$ i označava sa $\int_a^b f(x)\, dx$.

Zadatak 9.17 *Aproksimiraj površinu pseudotrapeza funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ nad intervalom $[1, 3]$ Riemmanovom sumom R_4, pri čemu su točke x_i^* polovišta podintervala rastava, te ilustriraj račun skicom. Istakni koliko numerički iznose, što geometrijski znače i gdje se na skici nalaze veličine Δx, $f(x_2^*)$, te umnožak $f(x_2^*)\Delta x$.*

Obzirom da smo integralne sume definirali na dva alternativna načina (Darbouxove sume i Riemannove sume), te posljedično i određene integrale na dva alternativna načina (Darbouxov određeni integral i Riemannov određeni integral), prirodno se nameće pitanje postoji li veza između tih integrala i kakva je ta veza. Da bismo odgovorili na to pitanje, potrebno je uočiti da za svaki $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ vrijedi

$$\begin{aligned}
m_i &\leq f(x_i^*) \leq M_i, \\
m_i\Delta x &\leq f(x_i^*)\Delta x \leq M_i\Delta x, \\
\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x &\leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x, \\
I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x = I,
\end{aligned}$$

pa po Teoremu o dva policajca slijedi

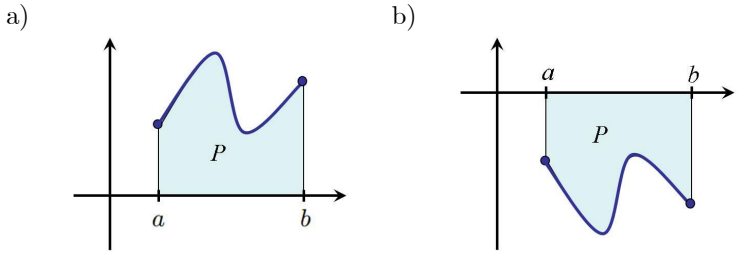
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = I = \int_a^b f(x)dx.$$

Ovime smo pokazali da Darbouxova integrabilnost implicira Riemannovu integrabilnost, te da su u tom slučaju ta dva integrala isti. Može se pokazat i obrat, tj. da Riemannova integrabilnost implicira Darbouxovu integrabilnost, pri čemu su ta dva integrala isti. Zaključujemo, dakle, da su Darbouxov i Riemannov integral ekvivalentni, tj. da su to samo dva različita načina kojima dolazimo do istog pojma određenog integrala (sada možemo ispustiti pridjev Darbouxov/Riemannov, jer sada znamo da je to u konačnici isti pojam).

Geometrijski, ovo znači da je svejedno hoćemo li površinu ispod grafa pozitivne funkcije aproksimirati opisanim pravokutnicima, upisanim pravokutnicima ili bilo kojim pravokutnicima kojima je visina između ta dva, jer u beskonačnosti ćemo dobiti isti broj.

9.4 Neka geometrijska svojstva

Pojam pseudotrapeza definirali smo samo za pozitivne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, no taj pojam se može proširiti i na negativne funkcije, pa je pseudotrapez pozitivne funkcije površina ispod grafa, a negativne povšina iznad grafa (vidi Sliku 9.11).



Slika 9.11: Pseudotrapez: a) pozitivne funkcije, b) negativne funkcije.

Ako sa P označimo površinu pseudotrapeza, onda vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} P & \text{ako je } f \text{ pozitivna funkcija,} \\ -P & \text{ako je } f \text{ negativna funckija.} \end{cases}$$

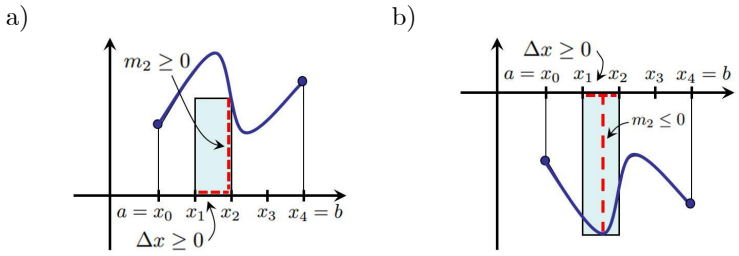
Naime, u slučaju pozitivne funkcije f veličine M_i i m_i su pozitivni brojevi (vidi Sliku 9.12), pa je

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{m_i \Delta x}_{\geq 0} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{M_i \Delta x}_{\geq 0} \geq 0,$$

dok su u slučaju negativne funkcije f veličine M_i i m_i su negativni brojevi (vidi Sliku 9.12), pa je

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{m_i \Delta x}_{\leq 0} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{M_i \Delta x}_{\leq 0} \leq 0.$$

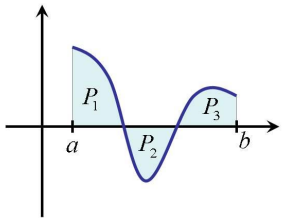
Dakle, određeni integral negativne funkcije je negativan broj, pa ne može biti jednak površini (koja je uvijek pozitivan broj), ali je jednak površini po apsolutnoj vrijednosti.



Slika 9.12: Određeni integral: a) pozitivne funkcije je pozitivan, b) negativne funkcije je negativan.

Sada možemo zaključiti da primjerice za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ prikazanu na Slici 9.13 vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = P_1 - P_2 + P_3.$$



Slika 9.13: Određeni integral i površine.

Zadatak 9.18 *Geometrijski interpretiraj integrale: a)* $\int_0^1 (1 - x^2)dx$, *b)* $\int_1^2 (1 - x^2)dx$, *c)* $\int_0^2 (1 - x^2)dx$. *Odgovori (bez izračunavanja integrala) je li taj integral pozitivan ili negativan broj!*

Ako se sjetimo da grafovi parnih i neparnih funkcija imaju lijepo svojstvo simetrije, onda dalje možemo zaključiti da za parnu funkciju $f(x)$ vrijedi

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,$$

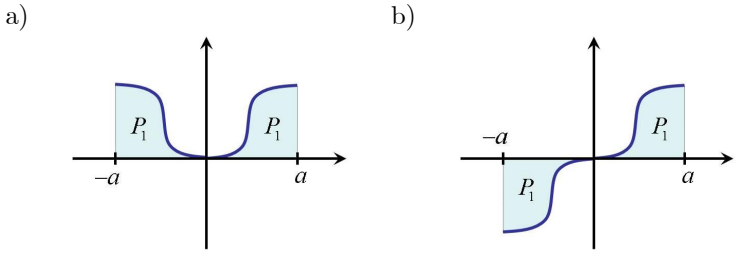
dok za neparnu funkciju $f(x)$ vrijedi

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Ove formule ilustrirane su Slikom 9.14.

Također, iz geometrijskih razloga definiciju određenog integrala proširujemo sa

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ i } \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \text{ (za } a \leq b).$$



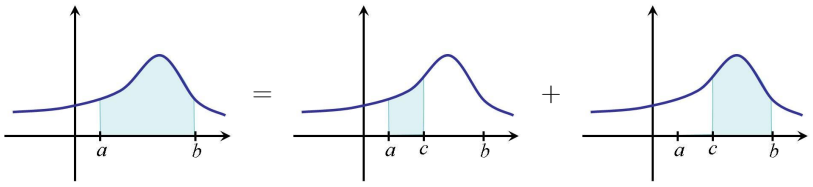
Slika 9.14: Određeni integral: a) parne funkcije, b) neparne funkcije.

Konačno, obzirom na proširenja koja smo definirali, može se pokazati da vrijedi formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

uvijek kad svi navedeni integrali postoje. Naime, ako je $c \in \langle a, b\rangle$ onda je iz geometrijske interpretacije svakog od integrala u formuli jasno da navedena formula u tom slučaju vrijedi (vidi Sliku 9.15). Ako je $c \notin \langle a, b\rangle$, onda iz geometrijskog značenja integrala (vidi Sliku 9.16) slijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



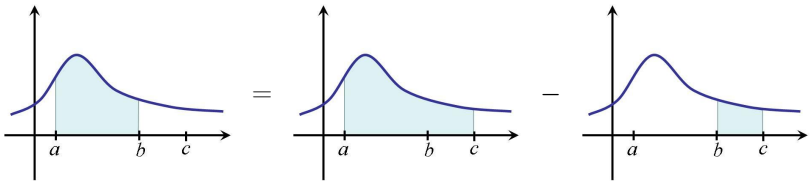
Slika 9.15: Geometrijska ilustracija formule za rastav određenog integrala na zbroj dvaju integrala u slučaju kad je $c \in \langle a, b\rangle$.

9.5 Izračunavanje određenog integrala

Teorem 9.19 (Newton-Leibnizova formula) *Ako je omeđena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna, onda vrijedi Newton-Leinbizova formula*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

pri čemu je F bilo koja primitivna funkcija od f.



Slika 9.16: Geometrijska ilustracija formule za rastav određenog integrala na zbroj dvaju integrala u slučaju kad je $c \notin \langle a, b \rangle$.

Newton-Leibnizovu formulu zapisujemo još sa

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b$$

Uočimo da će se u Newton-Leibnizovoj formuli konstanta integracije pokratiti sama sa sobom, pa je svejedno koju konstantu ćemo odabrati. Iz praktičnih razloga najčešće biramo $C = 0$.

Zadatak 9.20 *Odredi računski, te geometrijski interpretiraj integrale: a)* $\int_1^3 x^2 dx$, *b)* $\int_0^\pi \sin x dx$, *c)* $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x dx$.

Kao posljedica Newton-Leibnizove formule, može se pokazati da određeni integral ima svojsva:

- aditivnosti, tj. vrijedi

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

- homogenosti, tj. vrijedi

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

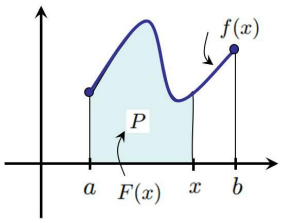
Newton-Leibnizova formula nam daje vezu po kojoj se određeni integral izračunava iz neodređenog (tj. iz primitivne funkcije). Postoji i obratna veza, po kojoj se primitivna funkcija izračunava iz određenog integrala, a koja je dana sljedećim teoremom.

Teorem 9.21 (Osnovni teorem integralnog računa) *Ako je funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija, onda je funkcija* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *definirana pravilom*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

primitivna funkcija od f.

Geometrijsko značenje Osnovnog teorema integralnog računa ilustrirano je na Slici 9.17.



Slika 9.17: Geometrijsko značenje osnovnog teorema integralnog računa.

Zadatak 9.22 *Zadana je funkcija* $f(x) = x^2$ *za* $x \in [1, 5]$. *Odredi njenu primitivnu funkciju* $F(x)$ *prema osnovnom teoremu integralnog računa. Izračunaj* $F(1)$ *i* $F(3)$, *te ih geometrijski interpretiraj.*

Zadatak 9.23 *Zadana je funkcija* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *za* $x \in [0, +\infty\rangle$. *Odredi njenu primitivnu funkciju* $F(x)$ *prema osnovnom teoremu integralnog računa. Izračunaj* $F(\frac{\pi}{4})$ *i* $\lim_{x\to+\infty} F(x)$, *te ih geometrijski interpretiraj.*

9.6 Nepravi integral

U prethodnim poglavljima definirali smo pojam određenog integrala za omeđene funkcije na omeđenim intervalima. U ovom poglavlju bavit ćemo se proširivanjem pojma određenog integrala na neomeđene intervale i neomeđene funkcije. Takvo proširenje pojma određeni integral nazivat ćemo nepravim integralom. Proširimo najprije pojam određenog integrala na funkcije definirane na neomeđenom intervalu.

Definicija 9.24 *Ako je funkcija* $f : [a, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ *integrabilna na svakom podintervalu* $[a, b]$ *domene, onda definiramo* nepravi integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

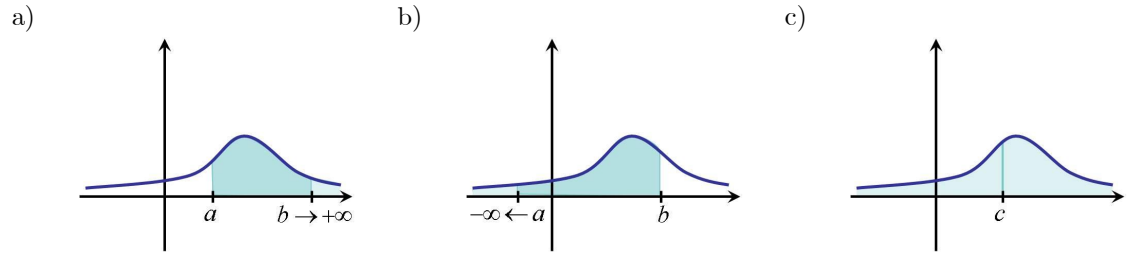
Ako je funkcija $f : \langle-\infty, a] \to \mathbb{R}$ *integrabilna na svakom podintervalu* $[a, b]$ *domene, onda definiramo* nepravi integral

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Ako je funkcija $f : \langle-\infty, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ *integrabilna na svakom omeđenom i zatvorenom podintervalu domene, onda definiramo* nepravi integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

Ova definicija ilustrirana je Slikom 9.18.



Slika 9.18: Nepravi integral za funkciju definiranu na intervalu: a) neomeđenom s desna, b) neomeđenm s lijeva, c) neomeđenom s obje strane.

Zadatak 9.25 *Odredi i geometrijski interpretiraj integrale: a)* $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$, *b)* $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$, *c)* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Proširimo sada pojam određenog integrala na neomeđene funcije.

Definicija 9.26 *Ako je neomeđena funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *omeđena i integrabilna na svakom podintervalu* $[a, b - \epsilon]$ *domene, onda definiramo* nepravi integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx.$$

Ako je neomeđena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *omeđena i integrabilna na svakom podintervalu* $[a + \mu, b]$ *domene, onda definiramo* nepravi integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mu \to 0^+} \int_{a+\mu}^b f(x)dx.$$

Ako je neomeđena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *omeđena i integrabilna na svakom zatvorenom podintervalu domene koji ne sadrži točku* $c \in \langle a, b \rangle$, *onda definiramo* nepravi integral

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

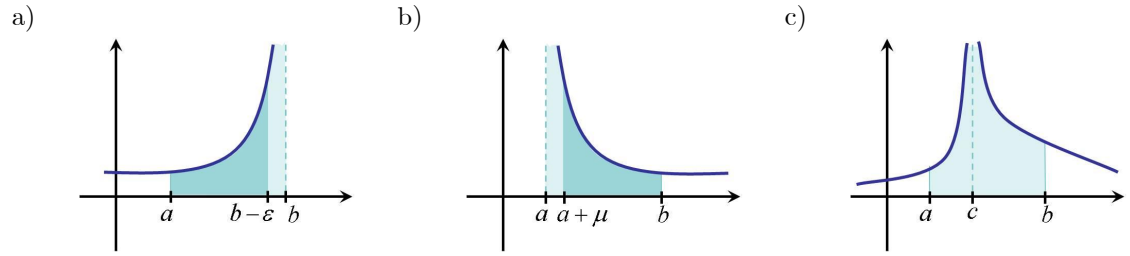
Ova definicija ilustrirana je Slikom 9.19.

Zadatak 9.27 *Odredi i geometrijski interpretiraj integrale: a)* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, *b)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$.

Obzirom da je nepravi integral definiran kao limes, onda kažemo da nepravi integral:

- konvergira, ako taj limes postoji i konačan je,
- divergira (u užem smislu), ako taj limes postoji i beskonačan je,
- divergira (u širem smislu), ako taj limes ne postoji.

Zadatak 9.28 *Odredi i geometrijski interpretiraj integrale: a)* $\int_0^{+\infty} x^2 dx$, *b)* $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$.



Slika 9.19: Nepravi integral za funkciju neomeđenu u: a) desnom kraju intervala, b) lijevom kraju intervala, c) unutarnoj točki c intervala.

9.7 Primjene određenog integrala

Određeni integral ima razn primjene, među ostalim može se primijeniti na:

- izračunavanje površine,
- izračunavanje duljine luka,
- izračunavanje volumena rotacijskih tijela,
- izračunavanje oplošja rotacijskih tijela.

U svim ovim primjenama graf funkcije $f(x)$ definirane za $x \in [a,b]$ se aproksimira izlomljenom linijom C_n koja spaja točke $T_i(x_i, f(x_i))$ pri čemu je $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ ekvidistantni rastav intervala $[a,b]$ (vidi Sliku referenca).

9.7.1 Površina

Već kod definiranja određenog integrala smo pokazali da je $\int_a^b f(x)dx = P$, pri čemu je P površina pseudotrapeza pozitivne funkcije f nad intervalom $[a,b]$. Veličina $dP = f(x)dx$ naziva se element površine i geometrijski predstavlja površinu "infinitezimalnog" pravokutnika, tj. pravokutnika nad beskonačno malenim intervalom $[x, x+dx]$ kojemu je visina $f(x)$. Sada ćemo pokazat da se površina jednako tako može aproksimirati i trapezima.

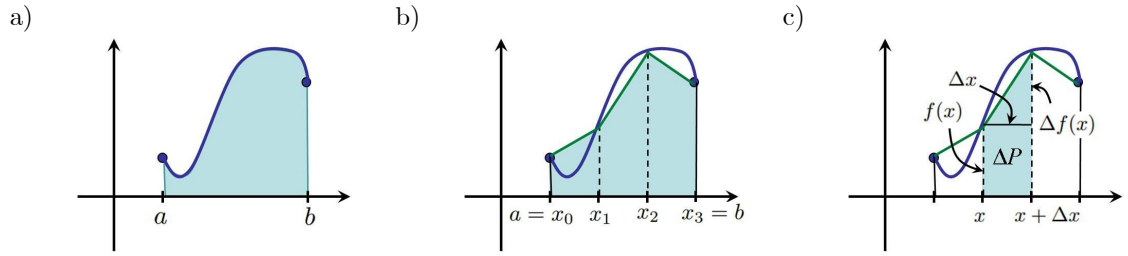
Neka je graf pozitivne funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a,b]$ aproksimiran izlomljenom linijom C_n, te neka je $[x, x+\Delta x]$ jedan podinterval rastava (vidi Sliku 9.20). Tada se površina pseudotrapeza može aproksimirati površinom ispod izlomljene linije C_n. Ako sa ΔP označimo površinu trapeza ispod jednog segmenta izlomljene linije C_n onda vrijedi

$$\Delta P = f(x)\Delta x + \frac{\Delta x \cdot \Delta f(x)}{2} = \Delta x \cdot \frac{f(x) + f(x+\Delta x)}{2}.$$

Ako $\Delta x \to 0$, onda ćemo prijeći na oznaku $\Delta x = dx$ i dobivamo da ΔP teži ka $dP = f(x)dx$. Ponovo, veličina dP se naziva *elementom površine*, samo ovaj put možemo smatrati da nam dP geometrijski predstavlja površinu "infinitezimalnog" trapeza, tj. trapeza nad beskonačno malenim segmentom $[x, x+dx]$.

Sada se površina pseudotrapeza dobiva sumiranjem elementa površine, tj. vrijedi

$$P = \int_a^b dP = \int_a^b f(x)dx.$$



Slika 9.20: Površina ravninskog lika: a) pseudotrapez, b) aproksimacija površinom ispod izlomljene linije, c) površina trapeza nad jednim podintervalom rastava.

9.7.2 Duljina luka

Neka je graf funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ aproksimiran izlomljenom linijom C_n, te neka je $[x, x + \Delta x]$ jedan podinterval rastava (vidi Sliku 9.21). Tada se duljina luka grafa funkcije f može aproksimirati duljinom izlomljene linije C_n. Ako sa Δs označimo duljinu jednog segmenta izlomljene linije C_n onda vrijedi

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta f(x)^2} = \Delta x \sqrt{1 + (\frac{\Delta f(x)}{\Delta x})^2}.$$

Ako $\Delta x \to 0$, onda $\Delta s \to ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$. Veličina ds naziva se *elementom luka*, te možemo smatrati da geometrijski predstavlja duljinu "infinitezimalnog" luka, tj. luka nad beskonačno malenim segmentom $[x, x + dx]$.

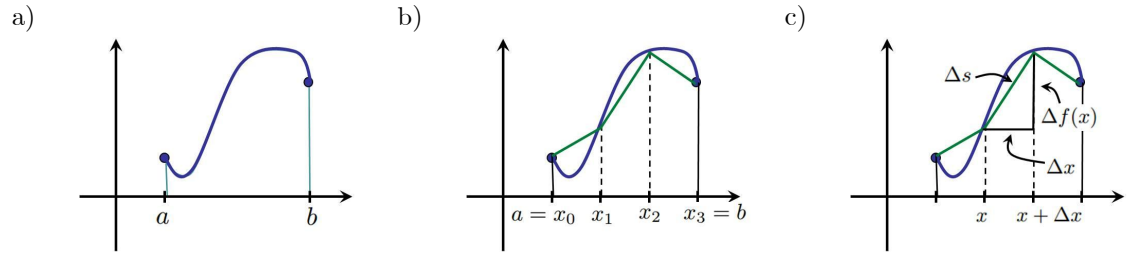
Sada se duljina luka s dobiva sumiranjem elemenata luka, tj. vrijedi

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

9.7.3 Volumen rotacijskog tijela

Neka je graf funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ aproksimiran izlomljenom linijom C_n, te neka je $[x, x + \Delta x]$ jedan podinterval rastava (vidi Sliku 9.22). Neka graf funkcije f rotira oko osi x. Tada se volumen nastalog tijela može aproksimirati volumenom tijela koje nastaje rotacijom izlomljene linije C_n. Ako sa ΔV označimo volumen nastao rotacijom jednog segmenta izlomljene linije C_n onda vrijedi

$$\Delta V = \frac{\pi \Delta x}{3}(f(x)^2 + f(x + \Delta x)^2 + f(x) \cdot f(x + \Delta x)).$$

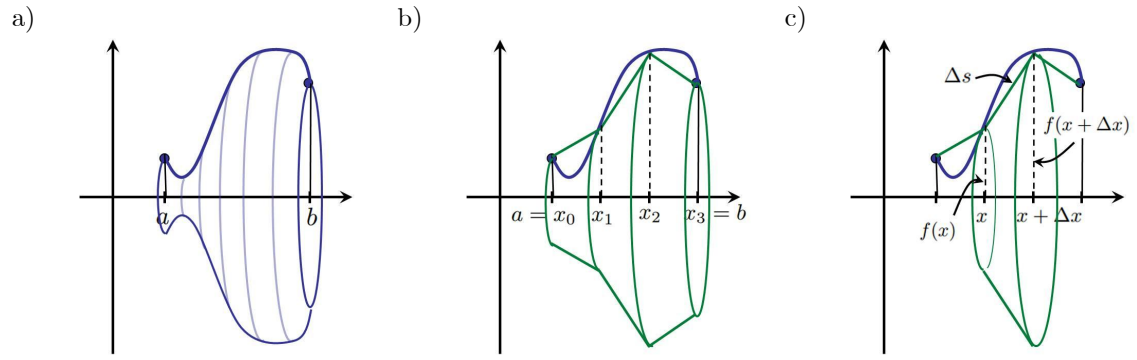


Slika 9.21: Duljina luka: a) graf funkcije, b) aproksimacija izlomljenom linijom, c) duljina jednog segmenta izlomljene linije.

Kad $\Delta x \to 0$, onda $\Delta V \to dV = \pi f(x)^2 dx$. Veličina dV naziva se *elementom volumena*, te možemo smatrati da nam geometrijski predstavlja volumen "infinitezimalnog" krnjeg stošca, tj. krnjeg stošca nad beskonačno malenim segmentom $[x, x + dx]$.

Sada se volumen V rotacijskog tijela dobiva sumiranjem elemenata volumena, tj. vrijedi

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b \pi f(x)^2 dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$



Slika 9.22: Rotacijsko tijelo: a) rotacija grafa funkcije, b) rotacija izlomljene linije, c) krnji stožac nastao rotacijom jednog segmenta izlomljene linije.

9.7.4 Oplošje rotacijskog tijela

Neka je graf funkcije $f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ aproksimiran izlomljenom linijom C_n, te neka je $[x, x + \Delta x]$ jedan podinterval rastava (vidi Sliku 9.22). Neka graf funkcije f rotira oko osi x. Tada se površina plašta nastalog rotacijskog tijela može aproksimirati površinom plašta tijela koje nastaje rotacijom izlomljene linije C_n. Ako sa ΔO označimo oplošje tijela nastalog rotacijom jednog segmenta izlomljene linije C_n onda vrijedi

$$\Delta O = \pi(f(x) + f(x + \Delta x))\Delta s.$$

Kad $\Delta x \to 0$, onda $\Delta O \to dO = 2\pi f(x)ds = 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$. Veličina dO naziva se *elementom oplošja*, te možemo smatrati da nam geometrijski predstavlja površinu plašta "infinitezimalnog" krnjeg stošca, tj. krnjeg stošca nad beskonačno malenim segmentom $[x, x+dx]$.

Sada se oplošje O rotacijskog tijela dobiva sumiranjem elemenata oplošja, tj. vrijedi

$$O = \int_a^b dO = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Bibliografija

[1] B. P. Demidović, Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike, Tehnička knjiga, Zagreb, 1978.

[2] S. Kurepa, Matematička analiza 1: Funkcije jedne varijable, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[3] S. Kurepa, Matematička analiza 2: Diferenciranje i integriranje, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

[4] P. M. Miličić, M. P. Uščumlić, Zbirka zadataka iz više matematike 1, Naučna knjiga Beograd, 1988.

[5] I. Slapničar, Matematika 1, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu, Split, 2002.

[6] I. Slapničar, Matematika 2, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu, Split, 2017.

[7] I. Slapničar, J. Barić, M. Ninčević, Matematika 1 - zbirka zadataka, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu, Split, 2010.

[8] I. Slapničar, N. Jakovčević Stor, J. Barić, I. Mirošević, Matematika 2 - zbirka zadataka, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu, Split, 2010.

[9] N. Uglešić, Viša matematika I, http://mapmf.pmfst.unist.hr/matematika/Nastavni%20materijali/visa_matematika.pdf.