Neprekidnost

Jelena Sedlar

Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

Neprekidnost funkcije

Neprekidnost funkcije

Definicija.

Neprekidnost funkcije

Definicija. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija,

Neprekidnost funkcije

Definicija. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te $x_0 \in X$.

Neprekidnost funkcije

Definicija. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te $x_0 \in X$. Kažemo da je f *neprekidna u* x_0

Neprekidnost funkcije

Definicija. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te $x_0 \in X$. Kažemo da je f *neprekidna u* x_0 ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Neprekidnost funkcije

Definicija. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te $x_0 \in X$. Kažemo da je f *neprekidna u* x_0 ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

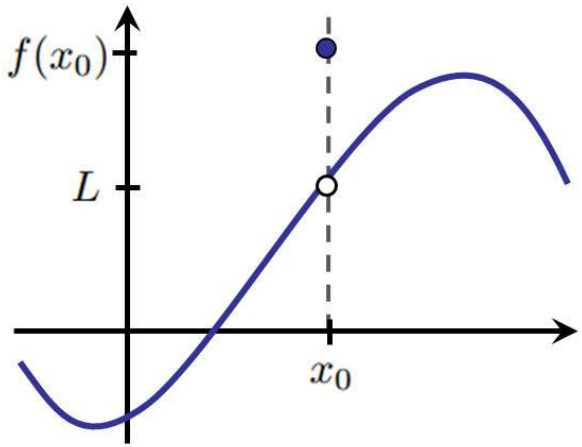
U suprotnom kažemo da f ima *prekid* u $x_0 \in X$.

Neprekidnost funkcije

Definicija. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te $x_0 \in X$. Kažemo da je f *neprekidna u* x_0 ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

U suprotnom kažemo da f ima *prekid* u $x_0 \in X$.

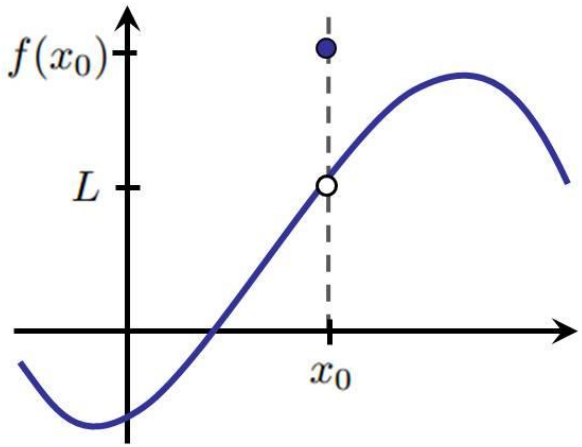


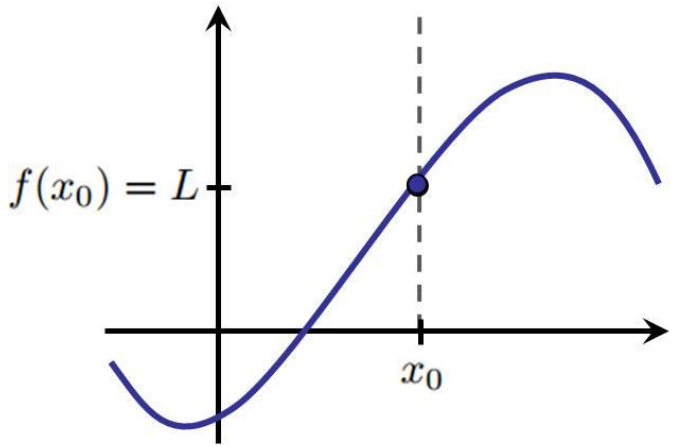
Neprekidnost funkcije

Definicija. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te $x_0 \in X$. Kažemo da je f *neprekidna u* x_0 ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

U suprotnom kažemo da f ima *prekid* u $x_0 \in X$.





Neprekidnost funkcije

Definicija. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te $x_0 \in X$. Kažemo da je f *neprekidna u* x_0 ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

U suprotnom kažemo da f ima *prekid* u $x_0 \in X$.

Napomena.

Neprekidnost funkcije

Definicija. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te $x_0 \in X$. Kažemo da je f *neprekidna u* x_0 ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

U suprotnom kažemo da f ima *prekid* u $x_0 \in X$.

Napomena. Funkcija može imati prekid samo u točkama domene.

Neprekidnost funkcije

Definicija. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te $x_0 \in X$. Kažemo da je f *neprekidna u* x_0 ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

U suprotnom kažemo da f ima *prekid* u $x_0 \in X$.

Napomena. Funkcija može imati prekid samo u točkama domene. Treba razlikovati prekid domene od prekida funkcije.

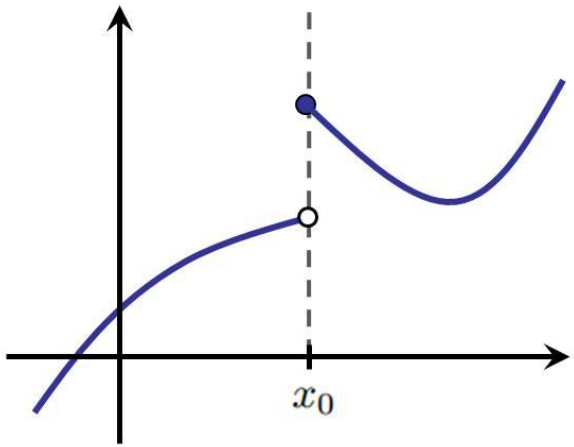
Neprekidnost funkcije

Definicija. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te $x_0 \in X$. Kažemo da je f *neprekidna u* x_0 ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

U suprotnom kažemo da f ima *prekid* u $x_0 \in X$.

Napomena. Funkcija može imati prekid samo u točkama domene. Treba razlikovati prekid domene od prekida funkcije.



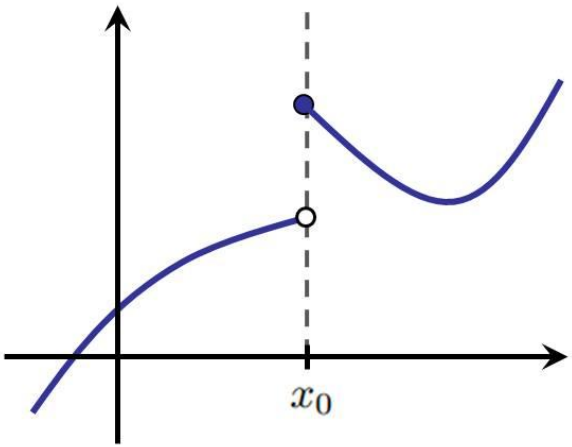
Neprekidnost funkcije

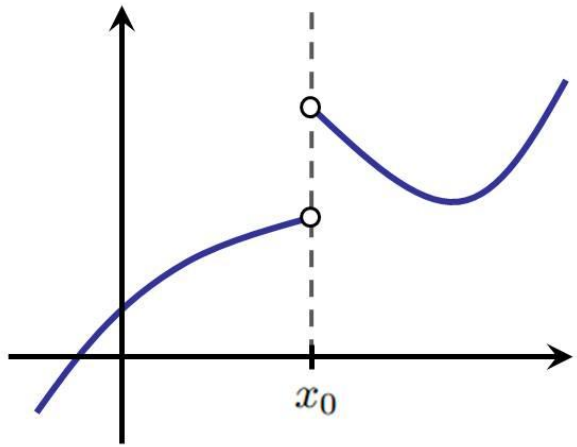
Definicija. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te $x_0 \in X$. Kažemo da je f *neprekidna u* x_0 ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

U suprotnom kažemo da f ima *prekid* u $x_0 \in X$.

Napomena. Funkcija može imati prekid samo u točkama domene. Treba razlikovati prekid domene od prekida funkcije.





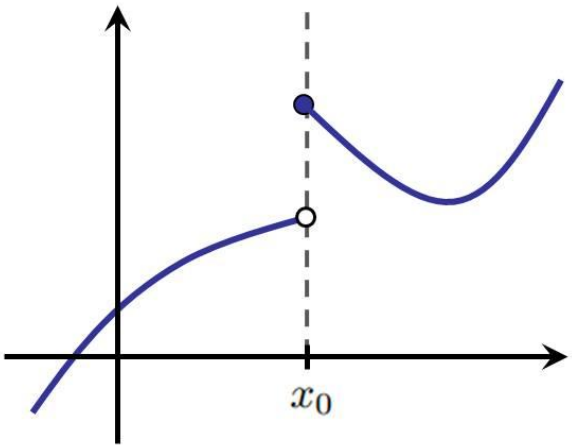
Neprekidnost funkcije

Definicija. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, te $x_0 \in X$. Kažemo da je f *neprekidna u* x_0 ako vrijedi

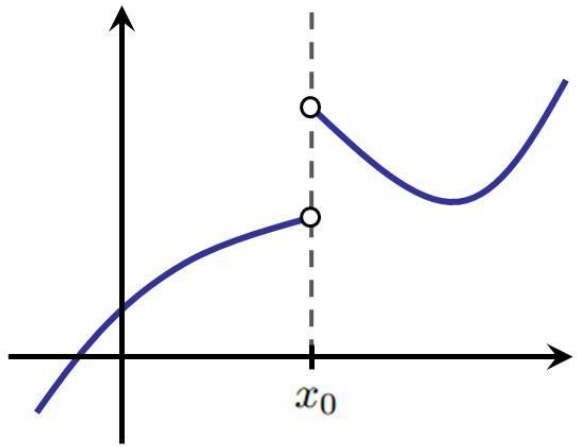
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

U suprotnom kažemo da f ima *prekid* u $x_0 \in X$.

Napomena. Funkcija može imati prekid samo u točkama domene. Treba razlikovati prekid domene od prekida funkcije.



$D(f) = \langle -\infty, +\infty \rangle$



$D(f) = \langle -\infty, x_0 \rangle \cup \langle x_0, +\infty \rangle$

Neprekidnost funkcije

Kažemo da funkcija f ima:

Neprekidnost funkcije

Kažemo da funkcija f ima:

- *uklonjivi prekid* u x_0 ako vrijedi

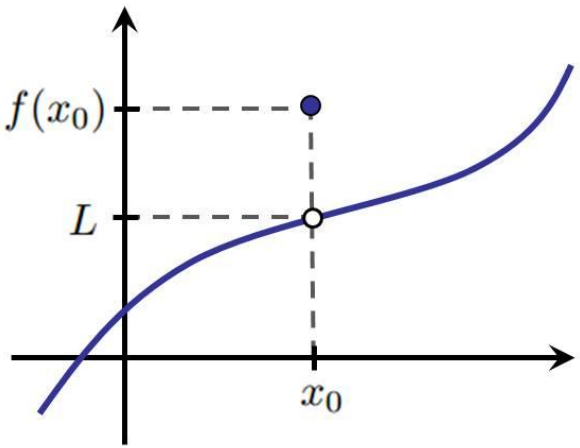
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \neq f(x_0).$$

Neprekidnost funkcije

Kažemo da funkcija f ima:

- *uklonjivi prekid* u x_0 ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \neq f(x_0).$$



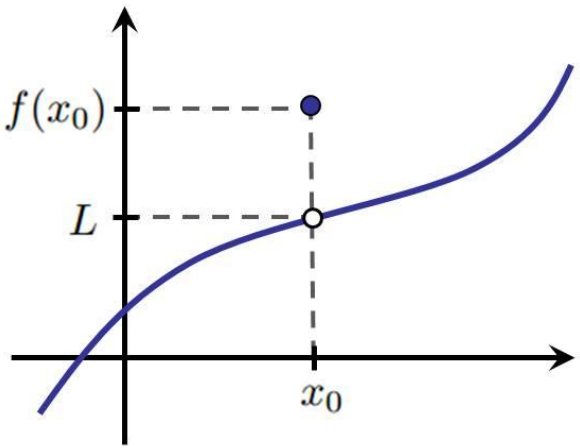
Neprekidnost funkcije

Kažemo da funkcija f ima:

- *uklonjivi prekid* u x_0 ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \neq f(x_0).$$

- *prekid prve vrste* u x_0 (tzv. "skok") ako su jednostrani limesi u točki x_0 konačni, ali međusobno različiti.



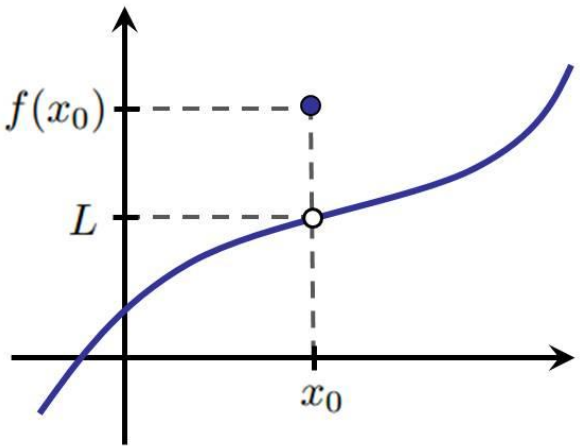
Neprekidnost funkcije

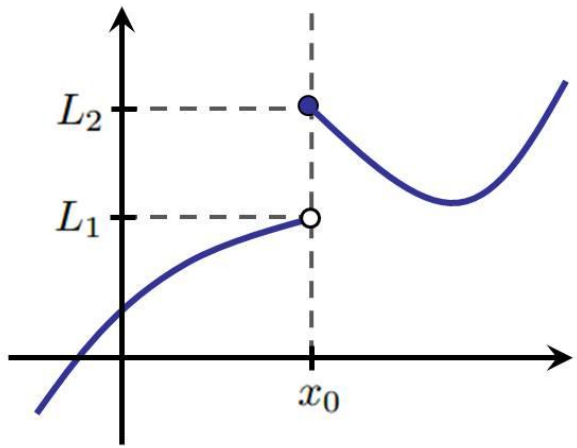
Kažemo da funkcija f ima:

- *uklonjivi prekid* u x_0 ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \neq f(x_0).$$

- *prekid prve vrste* u x_0 (tzv. "skok") ako su jednostrani limesi u točki x_0 konačni, ali međusobno različiti.





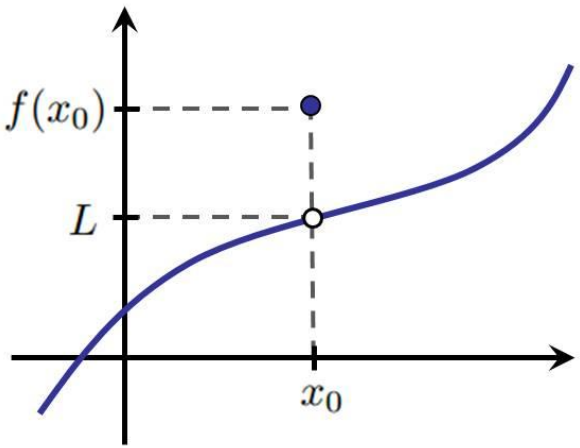
Neprekidnost funkcije

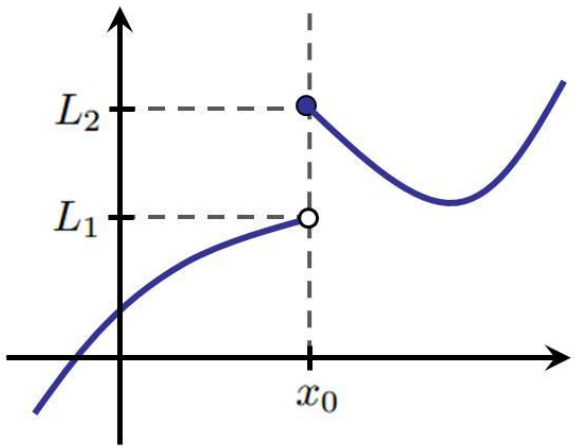
Kažemo da funkcija f ima:

- *uklonjivi prekid* u x_0 ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \neq f(x_0).$$

- *prekid prve vrste* u x_0 (tzv. "skok") ako su jednostrani limesi u točki x_0 konačni, ali međusobno različiti.
- *prekid druge vrste* u točki x_0 ako su jedan (ili oba) jednostrana limesa u točki x_0 beskonačni ili ne postoje.





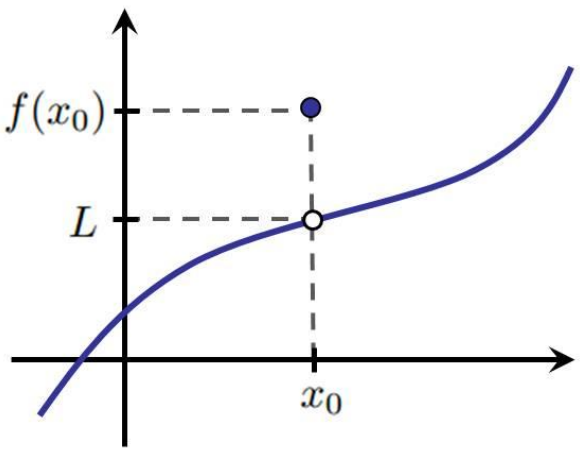
Neprekidnost funkcije

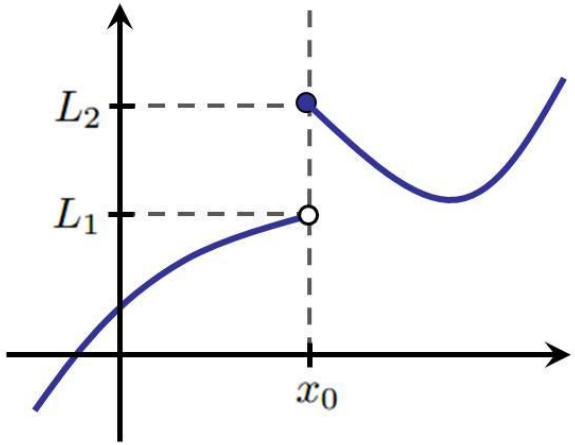
Kažemo da funkcija f ima:

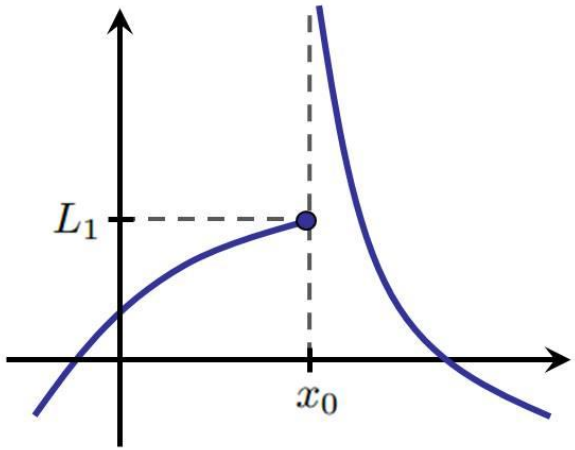
- *uklonjivi prekid* u x_0 ako vrijedi

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \neq f(x_0).$$

- *prekid prve vrste* u x_0 (tzv. "skok") ako su jednostrani limesi u točki x_0 konačni, ali međusobno različiti.
- *prekid druge vrste* u točki x_0 ako su jedan (ili oba) jednostrana limesa u točki x_0 beskonačni ili ne postoje.







Neprekidnost funkcije

Zadatak.

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Skiciraj graf neke funkcije za koju vrijedi:

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Skiciraj graf neke funkcije za koju vrijedi:

a) $$\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2 \end{array},$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Skiciraj graf neke funkcije za koju vrijedi:

a) $\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2 \end{array}$, b) $\begin{array}{l} f(3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2 \end{array}$,

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Skiciraj graf neke funkcije za koju vrijedi:

a) $\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2 \end{array}$, b) $\begin{array}{l} f(3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2 \end{array}$, c) $\begin{array}{l} f(2) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{array}$.

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Skiciraj graf neke funkcije za koju vrijedi:

a) $\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2 \end{array}$, b) $\begin{array}{l} f(3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2 \end{array}$, c) $\begin{array}{l} f(2) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{array}$.

Je li funkcija neprekidna u istaknutoj točki?

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Skiciraj graf neke funkcije za koju vrijedi:

a) $\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2 \end{array}$, b) $\begin{array}{l} f(3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2 \end{array}$, c) $\begin{array}{l} f(2) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{array}$.

Je li funkcija neprekidna u istaknutoj točki? Ako funkcija ima prekid, koje je prekid vrste?

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Skiciraj graf neke funkcije za koju vrijedi:

a) $\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2 \end{array}$, b) $\begin{array}{l} f(3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2 \end{array}$, c) $\begin{array}{l} f(2) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{array}$.

Je li funkcija neprekidna u istaknutoj točki? Ako funkcija ima prekid, koje je prekid vrste?

Rješenje.

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Skiciraj graf neke funkcije za koju vrijedi:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{l} f(1)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2 \end{array},\quad \text{b)}\quad \begin{array}{l} f(3)=3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2 \end{array},\quad \text{c)}\quad \begin{array}{l} f(2)=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1 \end{array}.$$

Je li funkcija neprekidna u istaknutoj točki? Ako funkcija ima prekid, koje je prekid vrste?

Rješenje. a)

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Skiciraj graf neke funkcije za koju vrijedi:

a) $\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2 \end{array}$, b) $\begin{array}{l} f(3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2 \end{array}$, c) $\begin{array}{l} f(2) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{array}$.

Je li funkcija neprekidna u istaknutoj točki? Ako funkcija ima prekid, koje je prekid vrste?

Rješenje. a) Funkcija ima prekid druge vrste u $x = 1$.

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Skiciraj graf neke funkcije za koju vrijedi:

a) $\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2 \end{array}$, b) $\begin{array}{l} f(3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2 \end{array}$, c) $\begin{array}{l} f(2) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{array}$.

Je li funkcija neprekidna u istaknutoj točki? Ako funkcija ima prekid, koje je prekid vrste?

Rješenje. a) Funkcija ima prekid druge vrste u $x = 1$.

b)

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Skiciraj graf neke funkcije za koju vrijedi:

$$\text{a)}\ \begin{array}{l} f(1)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2 \end{array},\quad \text{b)}\ \begin{array}{l} f(3)=3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2 \end{array},\quad \text{c)}\ \begin{array}{l} f(2)=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1 \end{array}.$$

Je li funkcija neprekidna u istaknutoj točki? Ako funkcija ima prekid, koje je prekid vrste?

Rješenje. a) Funkcija ima prekid druge vrste u $x=1$.

b) Funkcija ima prekid prve vrste (tzv. skok) u $x=3$.

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Skiciraj graf neke funkcije za koju vrijedi:

a) $\begin{array}{l} f(1)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2 \end{array}$, b) $\begin{array}{l} f(3)=3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2 \end{array}$, c) $\begin{array}{l} f(2)=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1 \end{array}$.

Je li funkcija neprekidna u istaknutoj točki? Ako funkcija ima prekid, koje je prekid vrste?

Rješenje. a) Funkcija ima prekid druge vrste u $x=1$.

b) Funkcija ima prekid prve vrste (tzv. skok) u $x=3$.

c)

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Skiciraj graf neke funkcije za koju vrijedi:

a) $\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2 \end{array}$, b) $\begin{array}{l} f(3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2 \end{array}$, c) $\begin{array}{l} f(2) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{array}$.

Je li funkcija neprekidna u istaknutoj točki? Ako funkcija ima prekid, koje je prekid vrste?

Rješenje. a) Funkcija ima prekid druge vrste u $x = 1$.

b) Funkcija ima prekid prve vrste (tzv. skok) u $x = 3$.

c) Funkcija ima uklonjivi prekid u $x = 2$.

Neprekidnost funkcije

Definicija.

Neprekidnost funkcije

Definicija. Kažemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ *neprekidna*

Neprekidnost funkcije

Definicija. Kažemo da je funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ *neprekidna* ako je neprekidna u svakoj točki domene X.

Neprekidnost funkcije

Kod razmatranja neprekidnosti elementarnih funkcija, možemo:

Neprekidnost funkcije

Kod razmatranja neprekidnosti elementarnih funkcija, možemo:

1. neprekidnost funkcije utvrđivati po definiciji;

Neprekidnost funkcije

Kod razmatranja neprekidnosti elementarnih funkcija, možemo:

1. neprekidnost funkcije utvrđivati po definiciji;
2. neprekidnost funkcije utvrđivati koristeći strukturu klase elementarnih funkcija:

Neprekidnost funkcije

Kod razmatranja neprekidnosti elementarnih funkcija, možemo:

1. neprekidnost funkcije utvrđivati po definiciji;
2. neprekidnost funkcije utvrđivati koristeći strukturu klase elementarnih funkcija:
    1. utvrdimo neprekidnost svih osnovnih elementarnih funkcija,

Neprekidnost funkcije

Kod razmatranja neprekidnosti elementarnih funkcija, možemo:

1. neprekidnost funkcije utvrđivati po definiciji;
2. neprekidnost funkcije utvrđivati koristeći strukturu klase elementarnih funkcija:
    1. utvrdimo neprekidnost svih osnovnih elementarnih funkcija,
    2. utvrdimo da svih 5 računskih operacija čuvaju neprekidnost,

Neprekidnost funkcije

Kod razmatranja neprekidnosti elementarnih funkcija, možemo:

1. neprekidnost funkcije utvrđivati po definiciji;
2. neprekidnost funkcije utvrđivati koristeći strukturu klase elementarnih funkcija:
   1. utvrdimo neprekidnost svih osnovnih elementarnih funkcija,
   2. utvrdimo da svih 5 računskih operacija čuvaju neprekidnost,

   iz čega možemo zaključiti da su sve elementarne funkcije neprekidne.

Neprekidnost funkcije

Za osnovne elementarne funkcije vrijedi:

Neprekidnost funkcije

Za osnovne elementarne funkcije vrijedi:

Teorem.

Neprekidnost funkcije

Za osnovne elementarne funkcije vrijedi:

Teorem. Sve osnovne elementarne funkcije su neprekidne.

Neprekidnost funkcije

Za osnovne elementarne funkcije vrijedi:

Teorem. Sve osnovne elementarne funkcije su neprekidne.

Za računske operacije vrijedi:

Neprekidnost funkcije

Za osnovne elementarne funkcije vrijedi:

Teorem. Sve osnovne elementarne funkcije su neprekidne.

Za računske operacije vrijedi:

Teorem.

Neprekidnost funkcije

Za osnovne elementarne funkcije vrijedi:

Teorem. Sve osnovne elementarne funkcije su neprekidne.

Za računske operacije vrijedi:

Teorem. Neka su funkcije f i g neprekidne u x_0.

Neprekidnost funkcije

Za osnovne elementarne funkcije vrijedi:

Teorem. Sve osnovne elementarne funkcije su neprekidne.

Za računske operacije vrijedi:

Teorem. Neka su funkcije f i g neprekidne u x_0. Tada su u x_0 neprekidne i funkcije $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ i $\frac{f}{g}$ (uz uvjet $g(x_0)\neq 0$).

Neprekidnost funkcije

Za osnovne elementarne funkcije vrijedi:

Teorem. Sve osnovne elementarne funkcije su neprekidne.

Za računske operacije vrijedi:

Teorem. Neka su funkcije f i g neprekidne u x_0. Tada su u x_0 neprekidne i funkcije $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ i $\frac{f}{g}$ (uz uvjet $g(x_0)\neq 0$).

Teorem.

Neprekidnost funkcije

Za osnovne elementarne funkcije vrijedi:

Teorem. Sve osnovne elementarne funkcije su neprekidne.

Za računske operacije vrijedi:

Teorem. Neka su funkcije f i g neprekidne u x_0. Tada su u x_0 neprekidne i funkcije $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ i $\frac{f}{g}$ (uz uvjet $g(x_0)\neq 0$).

Teorem. Ako je funkcija f neprekidna u x_0,

Neprekidnost funkcije

Za osnovne elementarne funkcije vrijedi:

Teorem. Sve osnovne elementarne funkcije su neprekidne.

Za računske operacije vrijedi:

Teorem. Neka su funkcije f i g neprekidne u x_0. Tada su u x_0 neprekidne i funkcije $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ i $\frac{f}{g}$ (uz uvjet $g(x_0)\neq 0$).

Teorem. Ako je funkcija f neprekidna u x_0, a funkcija g neprekidna u $y_0 = f(x_0)$,

Neprekidnost funkcije

Za osnovne elementarne funkcije vrijedi:

Teorem. Sve osnovne elementarne funkcije su neprekidne.

Za računske operacije vrijedi:

Teorem. Neka su funkcije f i g neprekidne u x_0. Tada su u x_0 neprekidne i funkcije $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ i $\frac{f}{g}$ (uz uvjet $g(x_0)\neq 0$).

Teorem. Ako je funkcija f neprekidna u x_0, a funkcija g neprekidna u $y_0 = f(x_0)$, onda je kompozicija $g\circ f$ neprekidna u x_0.

Neprekidnost funkcije

Za osnovne elementarne funkcije vrijedi:

Teorem. Sve osnovne elementarne funkcije su neprekidne.

Za računske operacije vrijedi:

Teorem. Neka su funkcije f i g neprekidne u x_0. Tada su u x_0 neprekidne i funkcije $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ i $\frac{f}{g}$ (uz uvjet $g(x_0)\neq 0$).

Teorem. Ako je funkcija f neprekidna u x_0, a funkcija g neprekidna u $y_0 = f(x_0)$, onda je kompozicija $g\circ f$ neprekidna u x_0.

Zaključujemo:

Neprekidnost funkcije

Za osnovne elementarne funkcije vrijedi:

Teorem. Sve osnovne elementarne funkcije su neprekidne.

Za računske operacije vrijedi:

Teorem. Neka su funkcije f i g neprekidne u x_0. Tada su u x_0 neprekidne i funkcije $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ i $\frac{f}{g}$ (uz uvjet $g(x_0)\neq 0$).

Teorem. Ako je funkcija f neprekidna u x_0, a funkcija g neprekidna u $y_0 = f(x_0)$, onda je kompozicija $g\circ f$ neprekidna u x_0.

Zaključujemo:

Teorem.

Neprekidnost funkcije

Za osnovne elementarne funkcije vrijedi:

Teorem. Sve osnovne elementarne funkcije su neprekidne.

Za računske operacije vrijedi:

Teorem. Neka su funkcije f i g neprekidne u x_0. Tada su u x_0 neprekidne i funkcije $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ i $\frac{f}{g}$ (uz uvjet $g(x_0)\neq 0$).

Teorem. Ako je funkcija f neprekidna u x_0, a funkcija g neprekidna u $y_0 = f(x_0)$, onda je kompozicija $g\circ f$ neprekidna u x_0.

Zaključujemo:

Teorem. Sve elementarne funkcije su neprekidne.

Neprekidnost funkcije

Zadatak.

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases},$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje.

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. a)

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. a) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 1$.

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. a) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 1$.

$$f(1) =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. a) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 1$.

$$f(1) = \frac{1}{1} =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. a) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 1$.

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \text{ b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. a) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 1$.

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \text{ b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. a) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 1$.

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \text{ b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. a) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 1$.

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = [\frac{1}{1-0+1} =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \text{ b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. a) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 1$.

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = [\frac{1}{1-0+1} = \frac{1}{-0}] =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \text{ b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. a) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 1$.

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = \left[\frac{1}{1-0+1} = \frac{1}{-0}\right] = -\infty$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \text{ b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. a) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 1$.

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = \left[\frac{1}{1-0+1} = \frac{1}{-0}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \text{ b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. a) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 1$.

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = [\frac{1}{1-0+1} = \frac{1}{-0}] = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \text{ b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. a) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{1} = 1 \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = [\frac{1}{1-0+1} = \frac{1}{-0}] = -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = [\frac{1}{1}] = \end{aligned}$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \text{ b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. a) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{1} = 1 \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = [\frac{1}{1-0+1} = \frac{1}{-0}] = -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = [\frac{1}{1}] = 1 \end{aligned}$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. a) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{1} = 1 \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = [\frac{1}{1-0+1} = \frac{1}{-0}] = -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = [\frac{1}{1}] = 1 \end{aligned}$$

Funkcija u $x_0 = 1$ ima prekid druge vrste.

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. b)

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. b) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 2$.

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. b) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 2$.

$$f(2) =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. b) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 2$.

$$f(2) = 2^2 - 1 =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. b) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 2$.

$$f(2) = 2^2 - 1 = 3$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. b) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 1 = 3 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \end{aligned}$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \text{ b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. b) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 1 = 3 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = \end{aligned}$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. b) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 1 = 3 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = [4 - 1] = \end{aligned}$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. b) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 1 = 3 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = [4 - 1] = 3 \end{aligned}$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. b) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 1 = 3 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = [4 - 1] = 3 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) &= \end{aligned}$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. b) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 1 = 3 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = [4 - 1] = 3 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) &= \lim_{x \to 2^+} (3 - x) = \end{aligned}$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \text{ b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. b) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 1 = 3 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = [4 - 1] = 3 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) &= \lim_{x \to 2^+} (3 - x) = [3 - 2] = \end{aligned}$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. b) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 1 = 3 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = [4 - 1] = 3 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) &= \lim_{x \to 2^+} (3 - x) = [3 - 2] = 1 \end{aligned}$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \text{ b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. b) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 1 = 3 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = [4 - 1] = 3 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) &= \lim_{x \to 2^+} (3 - x) = [3 - 2] = 1 \end{aligned}$$

Funkcija u $x_0 = 2$ ima prekid prve vrste (tzv. skok).

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. c)

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. c) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = -1$.

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. c) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = -1$.

$$f(-1) =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. c) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = -1$.

$$f(-1) = 2^{-(-1)} =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. c) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = -1$.

$$f(-1) = 2^{-(-1)} = 2^1 =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. c) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = -1$.

$$f(-1) = 2^{-(-1)} = 2^1 = 2$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. c) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = -1$.

$$f(-1) = 2^{-(-1)} = 2^1 = 2$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. c) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = -1$.

$$f(-1) = 2^{-(-1)} = 2^1 = 2$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 2^{-x} =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. c) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = -1$.

$$f(-1) = 2^{-(-1)} = 2^1 = 2$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 2^{-x} = [2^{-(-1)}] =$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. c) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = -1$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2^{-(-1)} = 2^1 = 2 \\ \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} 2^{-x} = [2^{-(-1)}] = 2 \end{aligned}$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. c) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = -1$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2^{-(-1)} = 2^1 = 2 \\ \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} 2^{-x} = [2^{-(-1)}] = 2 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \end{aligned}$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. c) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = -1$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2^{-(-1)} = 2^1 = 2 \\ \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} 2^{-x} = [2^{-(-1)}] = 2 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} (3 - x^2) = \end{aligned}$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. c) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = -1$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2^{-(-1)} = 2^1 = 2 \\ \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} 2^{-x} = [2^{-(-1)}] = 2 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} (3 - x^2) = [3 - (-1)^2] = \end{aligned}$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. c) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = -1$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2^{-(-1)} = 2^1 = 2 \\ \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} 2^{-x} = [2^{-(-1)}] = 2 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} (3 - x^2) = [3 - (-1)^2] = 2 \end{aligned}$$

Neprekidnost funkcije

Zadatak. Ispitaj neprekidnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{za } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{za } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{za } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{za } x > 2 \end{cases},$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{za } x \leq -1 \\ 3 - x^2 & \text{za } x > -1 \end{cases}.$$

Rješenje. c) Funkcija može imati prekid jedino u $x_0 = -1$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2^{-(-1)} = 2^1 = 2 \\ \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} 2^{-x} = [2^{-(-1)}] = 2 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} (3 - x^2) = [3 - (-1)^2] = 2 \end{aligned}$$

Funkcija je neprekidna u $x_0 = -1$.

Neprekidnost funkcije

Teorem (o ekstremnoj vrijednosti).

Neprekidnost funkcije

Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna

Neprekidnost funkcije

Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$.

Neprekidnost funkcije

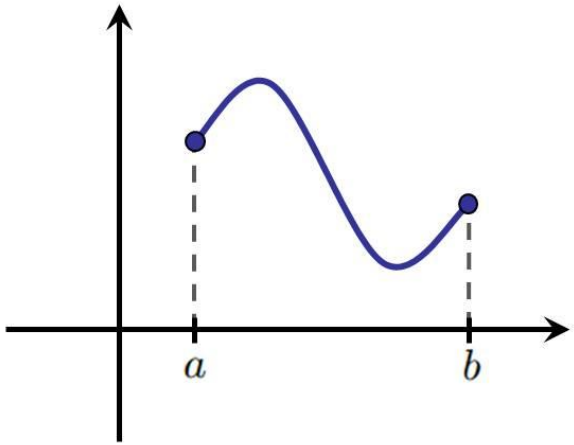
Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost.

Neprekidnost funkcije

Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.

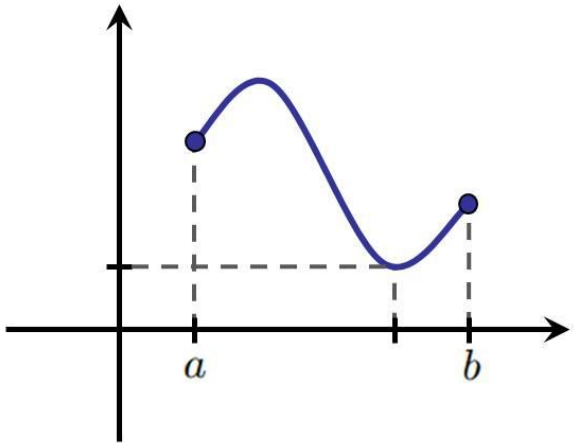
Neprekidnost funkcije

Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.



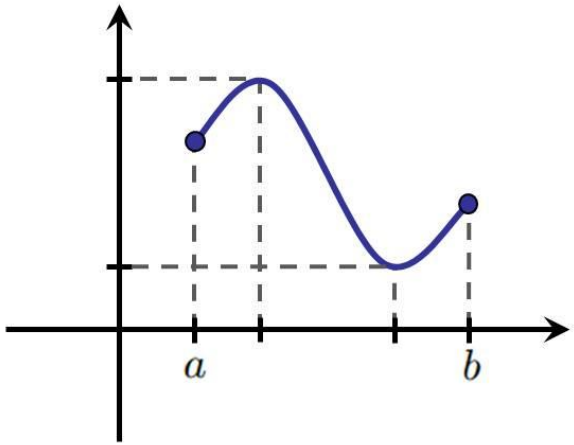
Neprekidnost funkcije

Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.



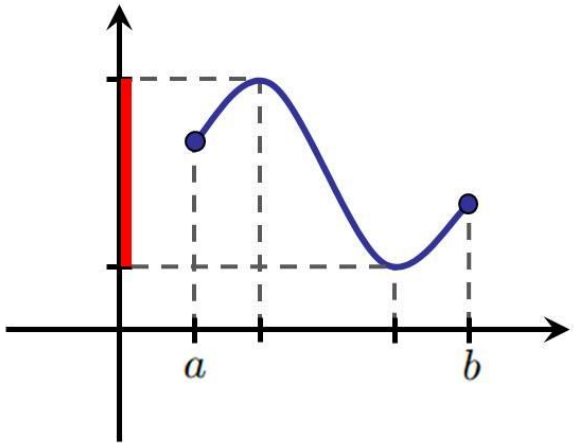
Neprekidnost funkcije

Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.



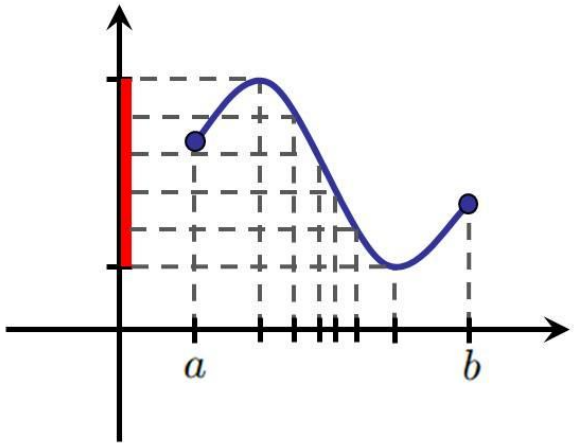
Neprekidnost funkcije

Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.



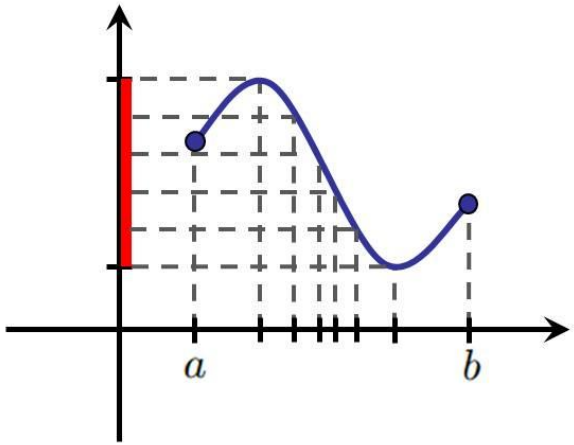
Neprekidnost funkcije

Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.



Neprekidnost funkcije

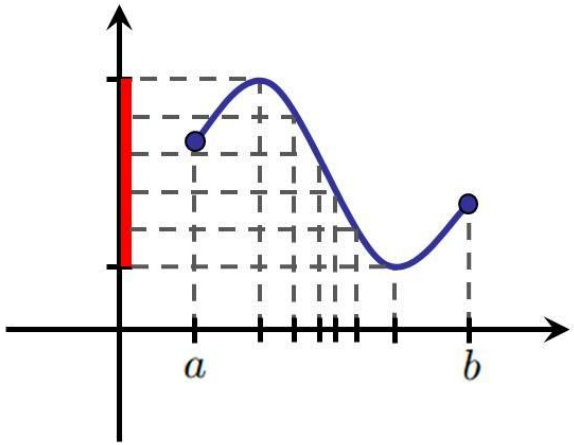
Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.



Napomena.

Neprekidnost funkcije

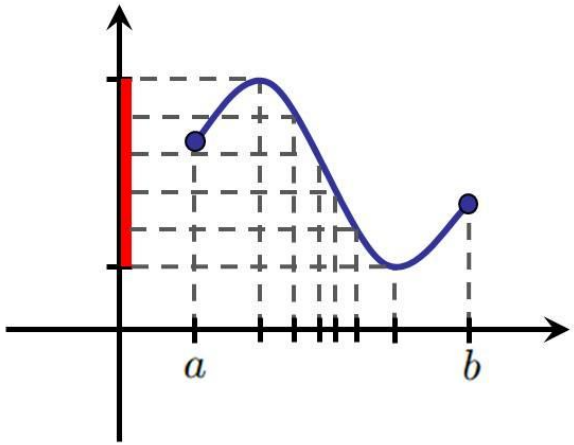
Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.



Napomena. Zahtjevi da: 1) funkcija bude neprekidna,

Neprekidnost funkcije

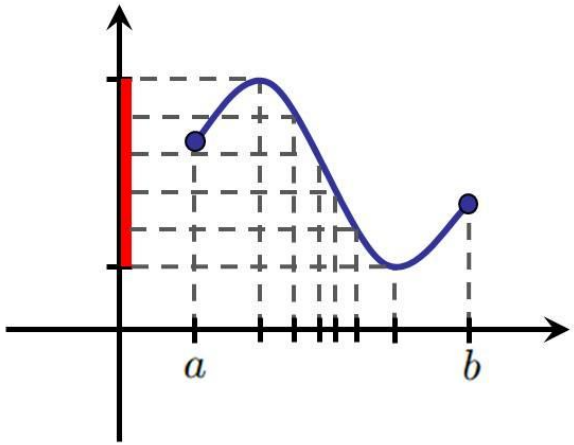
Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.



Napomena. Zahtjevi da: 1) funkcija bude neprekidna, 2) interval bude zatvoren,

Neprekidnost funkcije

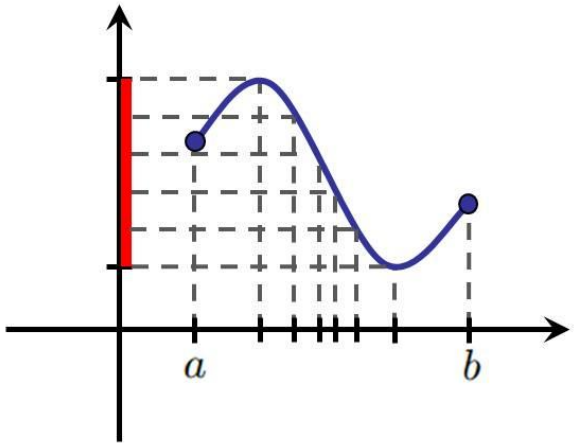
Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.



Napomena. Zahtjevi da: 1) funkcija bude neprekidna, 2) interval bude zatvoren, su jako važni

Neprekidnost funkcije

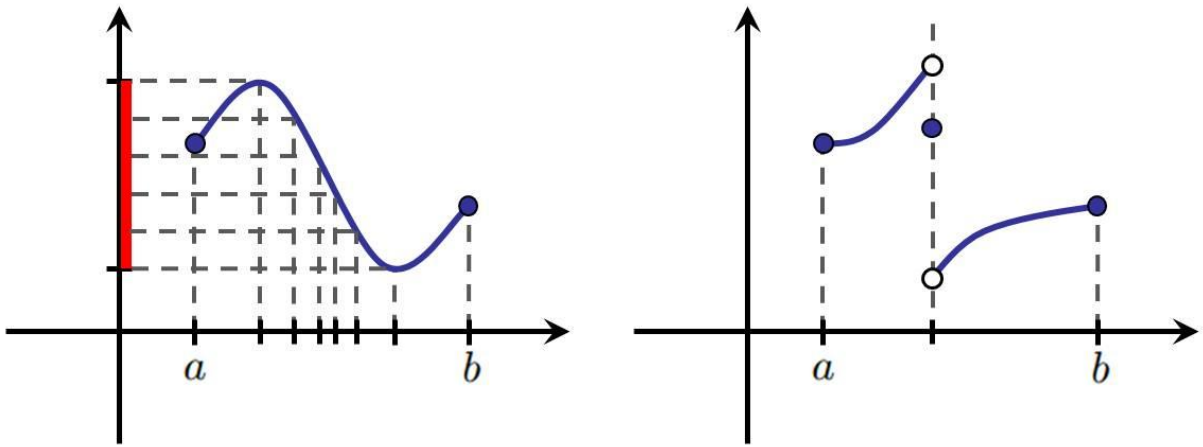
Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.



Napomena. Zahtjevi da: 1) funkcija bude neprekidna, 2) interval bude zatvoren, su jako važni jer bez njih tvrdnja Teorema općenito ne vrijedi.

Neprekidnost funkcije

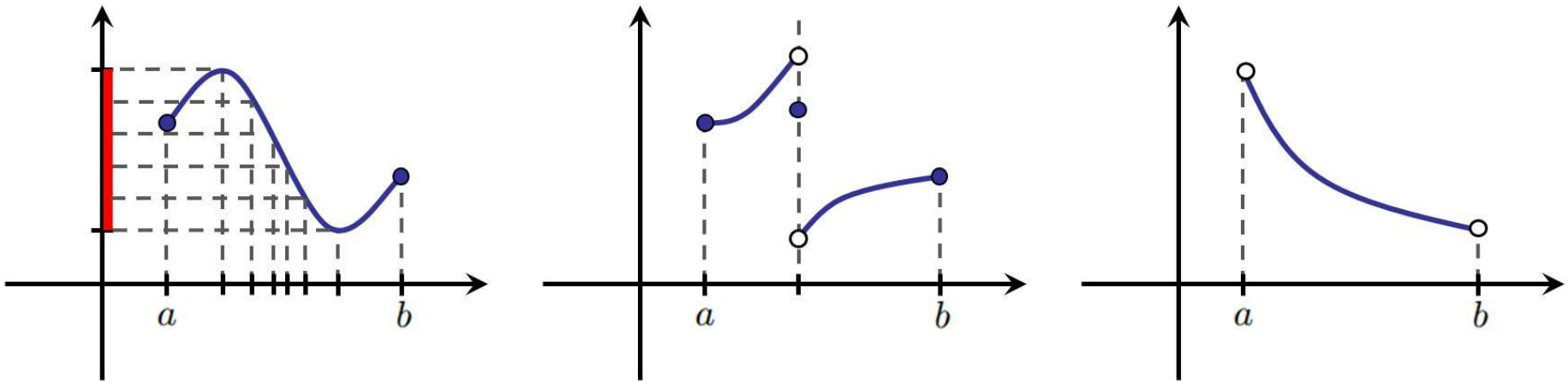
Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.



Napomena. Zahtjevi da: 1) funkcija bude neprekidna, 2) interval bude zatvoren, su jako važni jer bez njih tvrdnja Teorema općenito ne vrijedi.

Neprekidnost funkcije

Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.



Napomena. Zahtjevi da: 1) funkcija bude neprekidna, 2) interval bude zatvoren, su jako važni jer bez njih tvrdnja Teorema općenito ne vrijedi.

Neprekidnost funkcije

Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.

Posljedica:

Neprekidnost funkcije

Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.

Posljedica: ako za neprekidnu funkciju f vrijedi

Neprekidnost funkcije

Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.

Posljedica: ako za neprekidnu funkciju f vrijedi da su $f(a)$ i $f(b)$ brojevi suprotnog predznaka,

Neprekidnost funkcije

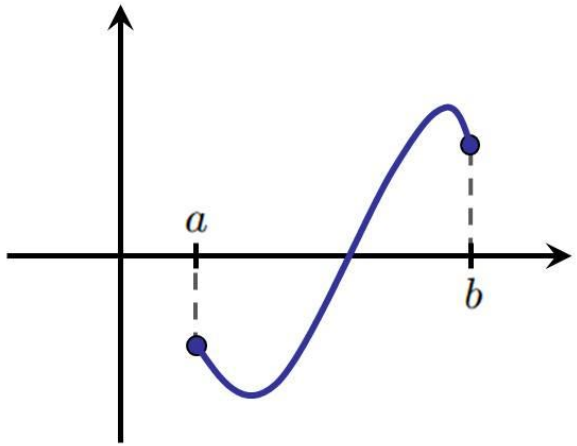
Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.

Posljedica: ako za neprekidnu funkciju f vrijedi da su $f(a)$ i $f(b)$ brojevi suprotnog predznaka, onda postoji $x \in [a, b]$ takav da je $f(x) = 0$.

Neprekidnost funkcije

Teorem (o ekstremnoj vrijednosti). Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Tada f postiže maksimalnu i minimalnu vrijednost. Štoviše, f postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma.

Posljedica: ako za neprekidnu funkciju f vrijedi da su $f(a)$ i $f(b)$ brojevi suprotnog predznaka, onda postoji $x \in [a, b]$ takav da je $f(x) = 0$.



Neprekidnost funkcije

Teorem.

Neprekidnost funkcije

Teorem. Ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

Neprekidnost funkcije

Teorem. Ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

i ako je funkcija g neprekidna u točki y_0,

Neprekidnost funkcije

Teorem. Ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

i ako je funkcija g neprekidna u točki y_0, onda vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} g\left(f\left(x\right)\right) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(y_0).$$

Neprekidnost funkcije

Teorem. Ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

i ako je funkcija g neprekidna u točki y_0, onda vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} g\left(f\left(x\right)\right) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(y_0).$$

Kažemo da limes i neprekidna funkcija g *komutiraju*.