Integral

Jelena Sedlar

Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

Integriranje je postupak obrnut deriviranju.

Integriranje je postupak obrnut deriviranju.

Funkcija
$\sin x$

Integriranje je postupak obrnut deriviranju.

Funkcija	
$\sin x$	$\xrightarrow{\textit{deriviranje}}$

Integriranje je postupak obrnut deriviranju.

Funkcija		**Derivacija**
$\sin x$	$\overset{\text{deriviranje}}{\longrightarrow}$	$\cos x$

Integriranje je postupak obrnut deriviranju.

Funkcija		**Derivacija**
$\sin x$	$\overset{deriviranje}{\longrightarrow}$	$\cos x$
$?$	$\longleftarrow$	$2x$

Integriranje je postupak obrnut deriviranju.

Funkcija		**Derivacija**
$\sin x$	$\overset{\text{deriviranje}}{\longrightarrow}$	$\cos x$
x^2	$\longleftarrow$	$2x$

Integriranje je postupak obrnut deriviranju.

Funkcija		**Derivacija**
$\sin x$	$\overset{deriviranje}{\longrightarrow}$	$\cos x$
x^2	$\longleftarrow$	$2x$
$x^2 + 1$		

Integriranje je postupak obrnut deriviranju.

Funkcija		**Derivacija**
$\sin x$	$\overset{\text{deriviranje}}{\longrightarrow}$	$\cos x$
x^2 $x^2 + 1$ $x^2 - \frac{1}{2}$	$\longleftarrow$	$2x$

Integriranje je postupak obrnut deriviranju.

Funkcija		**Derivacija**
$\sin x$	$\overset{\text{deriviranje}}{\longrightarrow}$	$\cos x$
x^2	$\longleftarrow$	$2x$
$x^2 + 1$		
$x^2 - \frac{1}{2}$		
$\ldots$		

Integriranje je postupak obrnut deriviranju.

Funkcija		**Derivacija**
$\sin x$	$\overset{deriviranje}{\longrightarrow}$	$\cos x$
x^2	$\longleftarrow$	$2x$
$x^2 + 1$		
$x^2 - \frac{1}{2}$		
$\dots$		
$x^2 + C$		

Integriranje je postupak obrnut deriviranju.

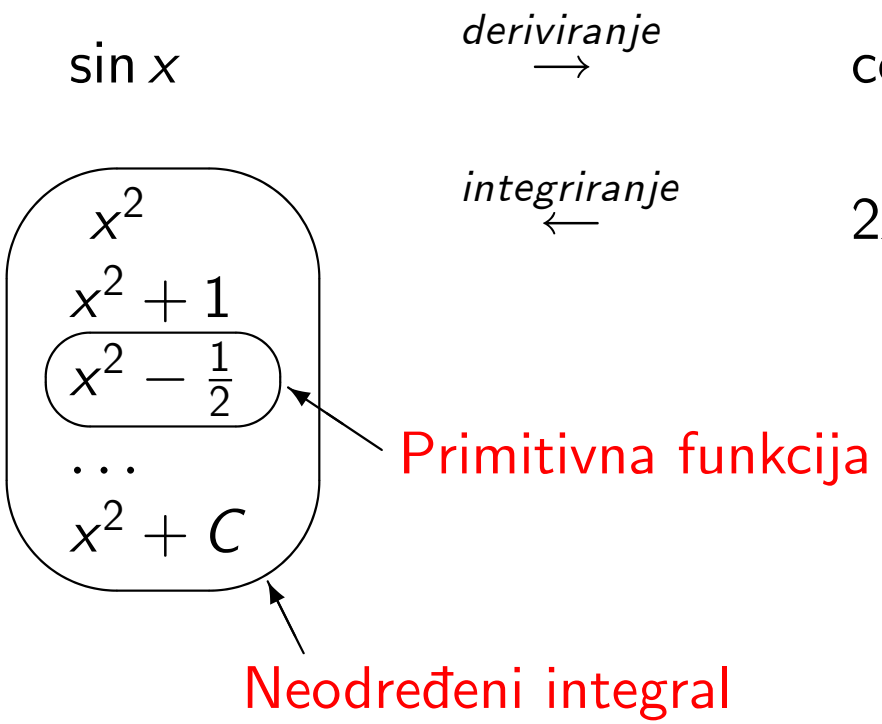
Funkcija		**Derivacija**
$\sin x$	$\overset{\text{deriviranje}}{\longrightarrow}$	$\cos x$
x^2	$\overset{\text{integriranje}}{\longleftarrow}$	$2x$
$x^2 + 1$		
$x^2 - \frac{1}{2}$		
$\ldots$		
$x^2 + C$		

Integriranje je postupak obrnut deriviranju.

Funkcija		**Derivacija**
$\sin x$	$\xrightarrow{\textit{deriviranje}}$	$\cos x$
x^2	$\xleftarrow{\textit{integriranje}}$	$2x$
$x^2 + 1$		
$x^2 - \frac{1}{2}$		
$\ldots$		
$x^2 + C$		

Primitivna funkcija

Integriranje je postupak obrnut deriviranju.



Neodređeni integral

Definicija.

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za svaki $x \in I$.

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za svaki $x \in I$.

Zadatak.

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za svaki $x \in I$.

Zadatak. Zadana funkcija $f(x) = 2x$.

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za svaki $x \in I$.

Zadatak. Zadana funkcija $f(x) = 2x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za svaki $x \in I$.

Zadatak. Zadana funkcija $f(x) = 2x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.
Rješenje.

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za svaki $x \in I$.

Zadatak. Zadana funkcija $f(x) = 2x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.
Rješenje. Mora biti $F'(x) = f(x)$,

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za svaki $x \in I$.

Zadatak. Zadana funkcija $f(x) = 2x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.
Rješenje. Mora biti $F'(x) = f(x)$, pa vrijedi

$$F(x) =$$

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za svaki $x \in I$.

Zadatak. Zadana funkcija $f(x) = 2x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.
Rješenje. Mora biti $F'(x) = f(x)$, pa vrijedi

$$F(x) = x^2,$$

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za svaki $x \in I$.

Zadatak. Zadana funkcija $f(x) = 2x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.
Rješenje. Mora biti $F'(x) = f(x)$, pa vrijedi

$$F(x) = x^2, \; F(x) =$$

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za svaki $x \in I$.

Zadatak. Zadana funkcija $f(x) = 2x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.
Rješenje. Mora biti $F'(x) = f(x)$, pa vrijedi

$$F(x) = x^2, \ F(x) = x^2 + 1,$$

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za svaki $x \in I$.

Zadatak. Zadana funkcija $f(x) = 2x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.
Rješenje. Mora biti $F'(x) = f(x)$, pa vrijedi

$$F(x) = x^2,\ F(x) = x^2 + 1,\ F(x) =$$

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za svaki $x \in I$.

Zadatak. Zadana funkcija $f(x) = 2x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.
Rješenje. Mora biti $F'(x) = f(x)$, pa vrijedi

$$F(x) = x^2,\ F(x) = x^2 + 1,\ F(x) = x^2 - \frac{1}{2},$$

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za svaki $x \in I$.

Zadatak. Zadana funkcija $f(x) = 2x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.
Rješenje. Mora biti $F'(x) = f(x)$, pa vrijedi

$$F(x) = x^2,\ F(x) = x^2 + 1,\ F(x) = x^2 - \frac{1}{2}, \ldots$$

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za svaki $x \in I$.

Zadatak. Zadana funkcija $f(x) = 2x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.
Rješenje. Mora biti $F'(x) = f(x)$, pa vrijedi

$$F(x) = x^2,\ F(x) = x^2 + 1,\ F(x) = x^2 - \frac{1}{2}, \ldots$$

Zaključak:

Neodređeni integral

Definicija. Primitivna funkcija (ili antiderivcija) funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je svaka neprekidna funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$F'(x) = f(x)$$

za svaki $x \in I$.

Zadatak. Zadana funkcija $f(x) = 2x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.
Rješenje. Mora biti $F'(x) = f(x)$, pa vrijedi

$$F(x) = x^2,\ F(x) = x^2 + 1,\ F(x) = x^2 - \frac{1}{2}, \ldots$$

Zaključak: primitivna funkcija **nije jedinstvena**!

Neodređeni integral

Teorem.

Neodređeni integral

Teorem. Neka su $F : I \to \mathbb{R}$ i $G : I \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$.

Neodređeni integral

Teorem. Neka su $F : I \to \mathbb{R}$ i $G : I \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$. Tada vrijedi $F(x) - G(x) = C$ za svaki $x \in I$,

Neodređeni integral

Teorem. Neka su $F : I \to \mathbb{R}$ i $G : I \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$. Tada vrijedi $F(x) - G(x) = C$ za svaki $x \in I$, pri čemu je C konstanta.

Neodređeni integral

Teorem. Neka su $F : I \to \mathbb{R}$ i $G : I \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$. Tada vrijedi $F(x) - G(x) = C$ za svaki $x \in I$, pri čemu je C konstanta.

Definicija.

Neodređeni integral

Teorem. Neka su $F : I \to \mathbb{R}$ i $G : I \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$. Tada vrijedi $F(x) - G(x) = C$ za svaki $x \in I$, pri čemu je C konstanta.

Definicija. Neodređeni integral funkcije $f : I \to \mathbb{R}$

Neodređeni integral

Teorem. Neka su $F : I \to \mathbb{R}$ i $G : I \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$. Tada vrijedi $F(x) - G(x) = C$ za svaki $x \in I$, pri čemu je C konstanta.

Definicija. Neodređeni integral funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je skup svih primitivnih funkcija funkcije f.

Neodređeni integral

Teorem. Neka su $F : I \to \mathbb{R}$ i $G : I \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$. Tada vrijedi $F(x) - G(x) = C$ za svaki $x \in I$, pri čemu je C konstanta.

Definicija. Neodređeni integral funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je skup svih primitivnih funkcija funkcije f. Neodređeni integral označavamo sa $\int f(x)dx$.

Neodređeni integral

Teorem. Neka su $F : I \to \mathbb{R}$ i $G : I \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$. Tada vrijedi $F(x) - G(x) = C$ za svaki $x \in I$, pri čemu je C konstanta.

Definicija. Neodređeni integral funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je skup svih primitivnih funkcija funkcije f. Neodređeni integral označavamo sa $\int f(x)dx$.

Za neodređeni integral često koristimo zapis

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Neodređeni integral

Teorem. Neka su $F : I \to \mathbb{R}$ i $G : I \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$. Tada vrijedi $F(x) - G(x) = C$ za svaki $x \in I$, pri čemu je C konstanta.

Definicija. Neodređeni integral funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je skup svih primitivnih funkcija funkcije f. Neodređeni integral označavamo sa $\int f(x)dx$.

Za neodređeni integral često koristimo zapis

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

pri čemu:

Neodređeni integral

Teorem. Neka su $F : I \to \mathbb{R}$ i $G : I \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$. Tada vrijedi $F(x) - G(x) = C$ za svaki $x \in I$, pri čemu je C konstanta.

Definicija. Neodređeni integral funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je skup svih primitivnih funkcija funkcije f. Neodređeni integral označavamo sa $\int f(x)dx$.

Za neodređeni integral često koristimo zapis

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

pri čemu:

- funkciju f nazivamo *podintegralnom funkcijom*,

Neodređeni integral

Teorem. Neka su $F : I \to \mathbb{R}$ i $G : I \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$. Tada vrijedi $F(x) - G(x) = C$ za svaki $x \in I$, pri čemu je C konstanta.

Definicija. Neodređeni integral funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je skup svih primitivnih funkcija funkcije f. Neodređeni integral označavamo sa $\int f(x)dx$.

Za neodređeni integral često koristimo zapis

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

pri čemu:

- funkciju f nazivamo *podintegralnom funkcijom*,
- varijablu x *varijablom integracije*,

Neodređeni integral

Teorem. Neka su $F : I \to \mathbb{R}$ i $G : I \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$. Tada vrijedi $F(x) - G(x) = C$ za svaki $x \in I$, pri čemu je C konstanta.

Definicija. Neodređeni integral funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je skup svih primitivnih funkcija funkcije f. Neodređeni integral označavamo sa $\int f(x)dx$.

Za neodređeni integral često koristimo zapis

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

pri čemu:

- funkciju f nazivamo *podintegralnom funkcijom*,
- varijablu x *varijablom integracije*,
- C *konstantom integracije*.

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija,

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak.

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak. Zadana je funkcija $f(x) = \sin x$.

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak. Zadana je funkcija $f(x) = \sin x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak. Zadana je funkcija $f(x) = \sin x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.

Rješenje.

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak. Zadana je funkcija $f(x) = \sin x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.
Rješenje. Vrijedi

$$f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) =$$

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak. Zadana je funkcija $f(x) = \sin x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.

Rješenje. Vrijedi

$$f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = \int \sin x dx =$$

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak. Zadana je funkcija $f(x) = \sin x$. Odredi primitivnu funkciju $F(x)$ funkcije $f(x)$.

Rješenje. Vrijedi

$$f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak.

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak. Zadana je primitivna funkcija $F(x) = e^{2x}$.

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak. Zadana je primitivna funkcija $F(x) = e^{2x}$. Odredi funkciju $f(x)$ čija je to primitivna funkcija.

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak. Zadana je primitivna funkcija $F(x) = e^{2x}$. Odredi funkciju $f(x)$ čija je to primitivna funkcija.

Rješenje.

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak. Zadana je primitivna funkcija $F(x) = e^{2x}$. Odredi funkciju $f(x)$ čija je to primitivna funkcija.

Rješenje. Vrijedi

$$F(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) =$$

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak. Zadana je primitivna funkcija $F(x) = e^{2x}$. Odredi funkciju $f(x)$ čija je to primitivna funkcija.

Rješenje. Vrijedi

$$F(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = F'(x) =$$

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak. Zadana je primitivna funkcija $F(x) = e^{2x}$. Odredi funkciju $f(x)$ čija je to primitivna funkcija.

Rješenje. Vrijedi

$$F(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = F'(x) = (e^{2x})' =$$

Neodređeni integral

Ako je $f(x)$ zadana funkcija i $F(x)$ njena primitivna funkcija, onda se veza između tih funkcija shematski prikazuje sa:

$$f(x) \overset{\text{integriranje}}{\underset{\text{deriviranje}}{\rightleftarrows}} F(x).$$

Zadatak. Zadana je primitivna funkcija $F(x) = e^{2x}$. Odredi funkciju $f(x)$ čija je to primitivna funkcija.

Rješenje. Vrijedi

$$F(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = F'(x) = (e^{2x})' = 2e^{2x}.$$

Neodređeni integral

Integriranje elementarnih funkcija

Struktura klase elementarnih funkcija.

Struktura klase elementarnih funkcija. Elementarne funkcije nastaju iz:

Struktura klase elementarnih funkcija. Elementarne funkcije nastaju iz:

1. osnovnih elementarnih funkcija,

Struktura klase elementarnih funkcija. Elementarne funkcije nastaju iz:

1. osnovnih elementarnih funkcija,
2. te računskih operacija.

Struktura klase elementarnih funkcija. Elementarne funkcije nastaju iz:

1. osnovnih elementarnih funkcija,
2. te računskih operacija.

Integriranje elementarnih funkcija.

Struktura klase elementarnih funkcija. Elementarne funkcije nastaju iz:

1. osnovnih elementarnih funkcija,
2. te računskih operacija.

Integriranje elementarnih funkcija. Obzirom na takvu strukturu, elementarne funkcije integriramo tako da odredimo:

Struktura klase elementarnih funkcija. Elementarne funkcije nastaju iz:

1. osnovnih elementarnih funkcija,
2. te računskih operacija.

Integriranje elementarnih funkcija. Obzirom na takvu strukturu, elementarne funkcije integriramo tako da odredimo:

1. integrale osnovnih elementarnih funkcija,

Struktura klase elementarnih funkcija. Elementarne funkcije nastaju iz:

1. osnovnih elementarnih funkcija,
2. te računskih operacija.

Integriranje elementarnih funkcija. Obzirom na takvu strukturu, elementarne funkcije integriramo tako da odredimo:

1. integrale osnovnih elementarnih funkcija,
2. pravila za integriranje računskih operacija

Struktura klase elementarnih funkcija. Elementarne funkcije nastaju iz:

1. osnovnih elementarnih funkcija,
2. te računskih operacija.

Integriranje elementarnih funkcija. Obzirom na takvu strukturu, elementarne funkcije integriramo tako da odredimo:

1. integrale osnovnih elementarnih funkcija,
2. pravila za integriranje računskih operacija (ako se integral ponaša pravilno prema tim operacijama).

Struktura klase elementarnih funkcija. Elementarne funkcije nastaju iz:

1. osnovnih elementarnih funkcija,
2. te računskih operacija.

Integriranje elementarnih funkcija. Obzirom na takvu strukturu, elementarne funkcije integriramo tako da odredimo:

1. integrale osnovnih elementarnih funkcija,
2. pravila za integriranje računskih operacija (ako se integral ponaša pravilno prema tim operacijama).

Pojasnimo ove točke detaljnije na sljedećim slajdovima!

Neodređeni integral

1) Integriranje osnovnih elementarnih funkcija

Neodređeni integral

1) Integriranje osnovnih elementarnih funkcija - formiramo tablicu osnovnih integrala

Neodređeni integral

1) Integriranje osnovnih elementarnih funkcija - formiramo tablicu osnovnih integrala tako da tablicu derivacija čitamo u obrnutom smjeru.

Neodređeni integral

1) Integriranje osnovnih elementarnih funkcija - formiramo tablicu osnovnih integrala tako da tablicu derivacija čitamo u obrnutom smjeru.

$\int \frac{\mathrm{dx}}{x} = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
$\int x^a \,\mathrm{dx} = \frac{x^{a+1}}{a+1}$ (za $a \neq -1$)	$\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$
$\int e^x \,\mathrm{dx} = e^x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\int a^x \,\mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert$
$\int \sin x \,\mathrm{dx} = -\cos x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\rvert$
$\int \cos x \,\mathrm{dx} = \sin x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$
$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$

Neodređeni integral

1) Integriranje osnovnih elementarnih funkcija - formiramo tablicu osnovnih integrala tako da tablicu derivacija čitamo u obrnutom smjeru.

$\int \frac{\mathrm{dx}}{x} = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
$\int x^a\,\mathrm{dx} = \frac{x^{a+1}}{a+1}\ (\text{za } a \neq -1)$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$
$\int e^x\,\mathrm{dx} = e^x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\int a^x\,\mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert$
$\int \sin x\,\mathrm{dx} = -\cos x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\rvert$
$\int \cos x\,\mathrm{dx} = \sin x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$
$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$

Problem:

Neodređeni integral

1) Integriranje osnovnih elementarnih funkcija - formiramo tablicu osnovnih integrala tako da tablicu derivacija čitamo u obrnutom smjeru.

$\int \frac{\mathrm{dx}}{x} = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
$\int x^a \,\mathrm{dx} = \frac{x^{a+1}}{a+1}$ (za $a \neq -1$)	$\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$
$\int e^x \,\mathrm{dx} = e^x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\int a^x \,\mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert$
$\int \sin x \,\mathrm{dx} = -\cos x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\rvert$
$\int \cos x \,\mathrm{dx} = \sin x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$
$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$

Problem: u tablici nedostaju integrali nekih osnovnih funkcija

Neodređeni integral

1) Integriranje osnovnih elementarnih funkcija - formiramo tablicu osnovnih integrala tako da tablicu derivacija čitamo u obrnutom smjeru.

$\int \frac{\mathrm{dx}}{x} = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
$\int x^a\,\mathrm{dx} = \frac{x^{a+1}}{a+1}$ (za $a \neq -1$)	$\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$
$\int e^x\,\mathrm{dx} = e^x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\int a^x\,\mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert$
$\int \sin x\,\mathrm{dx} = -\cos x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\rvert$
$\int \cos x\,\mathrm{dx} = \sin x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$
$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$

Problem: u tablici nedostaju integrali nekih osnovnih funkcija ($\ln x$, $\operatorname{tg} x$, ...).

Neodređeni integral

2) Pravila za integriranje računskih operacija:

Neodređeni integral

2) Pravila za integriranje računskih operacija:

- $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$

Neodređeni integral

2) Pravila za integriranje računskih operacija:

- $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$,
- $\int c \cdot f(x)dx = c \int f(x)dx$ pri čemu je c konstanta.

Neodređeni integral

2) Pravila za integriranje računskih operacija:

- $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$,
- $\int c \cdot f(x)dx = c \int f(x)dx$ pri čemu je c konstanta.

Problem:

Neodređeni integral

2) Pravila za integriranje računskih operacija:

- $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$,
- $\int c \cdot f(x)dx = c \int f(x)dx$ pri čemu je c konstanta.

Problem: nedostaju pravila za množenje, dijeljenje i kompoziciju funkcija!

Neodređeni integral

2) Pravila za integriranje računskih operacija:

- $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$,
- $\int c \cdot f(x)dx = c \int f(x)dx$ pri čemu je c konstanta.

Problem: nedostaju pravila za množenje, dijeljenje i kompoziciju funkcija!

- $\int f(x)g(x)dx = ?$

Neodređeni integral

2) Pravila za integriranje računskih operacija:

- $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$,
- $\int c \cdot f(x)dx = c \int f(x)dx$ pri čemu je c konstanta.

Problem: nedostaju pravila za množenje, dijeljenje i kompoziciju funkcija!

- $\int f(x)g(x)dx = ?$
- $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = ?$

Neodređeni integral

2) Pravila za integriranje računskih operacija:

- $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$,
- $\int c \cdot f(x)dx = c \int f(x)dx$ pri čemu je c konstanta.

Problem: nedostaju pravila za množenje, dijeljenje i kompoziciju funkcija!

- $\int f(x)g(x)dx = ?$
- $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = ?$
- $\int f(g(x))dx = ?$

Neodređeni integral

Problemi kod integriranja elementarnih funkcija.

Neodređeni integral

Problemi kod integriranja elementarnih funkcija. Kod integriranja elementarnih funkcija korištenjem strukture tih funkcija nastaju problemi:

Neodređeni integral

Problemi kod integriranja elementarnih funkcija. Kod integriranja elementarnih funkcija korištenjem strukture tih funkcija nastaju problemi:

1. u tablici nedostaju integrali nekih osnovnih elementarnih funkcija,

Neodređeni integral

Problemi kod integriranja elementarnih funkcija. Kod integriranja elementarnih funkcija korištenjem strukture tih funkcija nastaju problemi:

1. u tablici nedostaju integrali nekih osnovnih elementarnih funkcija,
2. među pravilima nedostaju pravila za tri od pet računskih operacija.

Neodređeni integral

Problemi kod integriranja elementarnih funkcija. Kod integriranja elementarnih funkcija korištenjem strukture tih funkcija nastaju problemi:

1. u tablici nedostaju integrali nekih osnovnih elementarnih funkcija,
2. među pravilima nedostaju pravila za tri od pet računskih operacija.

Uklanjanje problema.

Neodređeni integral

Problemi kod integriranja elementarnih funkcija. Kod integriranja elementarnih funkcija korištenjem strukture tih funkcija nastaju problemi:

1. u tablici nedostaju integrali nekih osnovnih elementarnih funkcija,
2. među pravilima nedostaju pravila za tri od pet računskih operacija.

Uklanjanje problema. Problemi koji nastaju se djelomično mogu ukloniti:

Neodređeni integral

Problemi kod integriranja elementarnih funkcija. Kod integriranja elementarnih funkcija korištenjem strukture tih funkcija nastaju problemi:

1. u tablici nedostaju integrali nekih osnovnih elementarnih funkcija,
2. među pravilima nedostaju pravila za tri od pet računskih operacija.

Uklanjanje problema. Problemi koji nastaju se djelomično mogu ukloniti:

1. integrali osnovnih elementarnih se mogu odrediti

Neodređeni integral

Problemi kod integriranja elementarnih funkcija. Kod integriranja elementarnih funkcija korištenjem strukture tih funkcija nastaju problemi:

1. u tablici nedostaju integrali nekih osnovnih elementarnih funkcija,
2. među pravilima nedostaju pravila za tri od pet računskih operacija.

Uklanjanje problema. Problemi koji nastaju se djelomično mogu ukloniti:

1. integrali osnovnih elementarnih se mogu odrediti (problem je **potpuno** uklonjiv),

Neodređeni integral

Problemi kod integriranja elementarnih funkcija. Kod integriranja elementarnih funkcija korištenjem strukture tih funkcija nastaju problemi:

1. u tablici nedostaju integrali nekih osnovnih elementarnih funkcija,
2. među pravilima nedostaju pravila za tri od pet računskih operacija.

Uklanjanje problema. Problemi koji nastaju se djelomično mogu ukloniti:

1. integrali osnovnih elementarnih se mogu odrediti (problem je **potpuno** uklonjiv),
2. pravila koja nedostaju se ne mogu nadoknaditi

Neodređeni integral

Problemi kod integriranja elementarnih funkcija. Kod integriranja elementarnih funkcija korištenjem strukture tih funkcija nastaju problemi:

1. u tablici nedostaju integrali nekih osnovnih elementarnih funkcija,
2. među pravilima nedostaju pravila za tri od pet računskih operacija.

Uklanjanje problema. Problemi koji nastaju se djelomično mogu ukloniti:

1. integrali osnovnih elementarnih se mogu odrediti (problem je **potpuno** uklonjiv),
2. pravila koja nedostaju se ne mogu nadoknaditi (problem se **djelomično** rješava različitim metodama integriranja).

Neodređeni integral

Shematski prikaz ovog izlaganja je sljedeći:

Neodređeni integral

Shematski prikaz ovog izlaganja je sljedeći:

	Elementarne funkcije	
Struktura	osnovne elementarne funkcije	računske operacije

Neodređeni integral

Shematski prikaz ovog izlaganja je sljedeći:

	Elementarne funkcije	
Struktura	osnovne elementarne funkcije	računske operacije
Integriranje	tablica osnovnih integrala	pravila integriranja

Neodređeni integral

Shematski prikaz ovog izlaganja je sljedeći:

	Elementarne funkcije	
Struktura	osnovne elementarne funkcije	računske operacije
Integriranje	tablica osnovnih integrala	pravila integriranja
Problemi	u tablici nedostaju integrali nekih osnovnih elementarnih funkcija	nedostaju pravila za 3 operacije

Neodređeni integral

Shematski prikaz ovog izlaganja je sljedeći:

	Elementarne funkcije	
Struktura	osnovne elementarne funkcije	računske operacije
Integriranje	tablica osnovnih integrala	pravila integriranja
Problemi	u tablici nedostaju integrali nekih osnovnih elementarnih funkcija	nedostaju pravila za 3 operacije
Rješavanje problema	problem se može potpuno riješiti	problem se djelomično zaobilazi metodama integriranja

Neodređeni integral

Zadatak.

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx,$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx, \quad \int \frac{2}{x} dx,$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx, \quad \int \frac{2}{x} dx, \quad \int \left(x - 3e^x\right) dx,$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx, \quad \int \frac{2}{x} dx, \quad \int \left(x - 3e^x\right) dx, \quad \int x e^x dx.$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx, \quad \int \frac{2}{x} dx, \quad \int \left(x - 3e^x\right) dx, \quad \int x e^x dx.$$

Rješenje.

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx, \quad \int \frac{2}{x} dx, \quad \int \left(x - 3e^x\right) dx, \quad \int x e^x dx.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$\int \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx \quad =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}\right) dx,\ \int \frac{2}{x} dx,\ \int \left(x-3e^x\right) dx,\ \int xe^x dx.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}\right) dx \quad = \quad \int x^2 dx + \int \sqrt{x} dx =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}\right) dx, \ \int \frac{2}{x} dx, \ \int \left(x-3e^x\right) dx, \ \int xe^x dx.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}\right) dx \quad = \quad \int x^2 dx + \int \sqrt{x} dx = \int x^2 dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}\right) dx,\ \int \frac{2}{x} dx,\ \int \left(x-3e^x\right) dx,\ \int xe^x dx.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\int \left(x^2+\sqrt{x}\right) dx &= \int x^2 dx + \int \sqrt{x} dx = \int x^2 dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C,\end{aligned}$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}\right) dx,\ \int \frac{2}{x} dx,\ \int \left(x-3e^x\right) dx,\ \int xe^x dx.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\int \left(x^2+\sqrt{x}\right) dx &= \int x^2 dx + \int \sqrt{x} dx = \int x^2 dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = \\
&= \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C, \\
\int \frac{2}{x} dx &=
\end{aligned}$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}\right) dx,\ \int \frac{2}{x} dx,\ \int \left(x-3e^x\right) dx,\ \int xe^x dx.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\int \left(x^2+\sqrt{x}\right) dx &= \int x^2 dx + \int \sqrt{x} dx = \int x^2 dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = \\
&= \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C, \\
\int \frac{2}{x} dx &= 2\int \frac{1}{x} dx =
\end{aligned}$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx,\ \int \frac{2}{x}dx,\ \int \left(x-3e^x\right)dx,\ \int xe^x dx.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx &= \int x^2dx+\int \sqrt{x}dx=\int x^2dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx= \\ &= \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C, \\ \int \frac{2}{x}dx &= 2\int \frac{1}{x}dx=2\ln|x|+C,\end{aligned}$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx,\ \int \frac{2}{x}dx,\ \int \left(x-3e^x\right)dx,\ \int xe^x dx.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx &= \int x^2dx+\int \sqrt{x}dx=\int x^2dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx= \\
&= \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C, \\
\int \frac{2}{x}dx &= 2\int \frac{1}{x}dx=2\ln|x|+C, \\
\int \left(x-3e^x\right)dx &=
\end{aligned}$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}\right) dx,\ \int \frac{2}{x} dx,\ \int \left(x-3e^x\right) dx,\ \int xe^x dx.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\int \left(x^2+\sqrt{x}\right) dx &= \int x^2 dx + \int \sqrt{x} dx = \int x^2 dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = \\
&= \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C, \\
\int \frac{2}{x} dx &= 2\int \frac{1}{x} dx = 2\ln|x| + C, \\
\int \left(x-3e^x\right) dx &= \int x dx - 3\int e^x dx =
\end{aligned}$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx,\ \int \frac{2}{x}dx,\ \int \left(x-3e^x\right)dx,\ \int xe^x dx.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx &= \int x^2dx+\int \sqrt{x}dx=\int x^2dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx= \\
&= \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C, \\
\int \frac{2}{x}dx &= 2\int \frac{1}{x}dx=2\ln|x|+C, \\
\int \left(x-3e^x\right)dx &= \int xdx-3\int e^x dx=\frac{1}{2}x^2-3e^x+C.
\end{aligned}$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx,\ \int \frac{2}{x}dx,\ \int \left(x-3e^x\right)dx,\ \int xe^x dx.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx &= \int x^2dx+\int \sqrt{x}dx=\int x^2dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx= \\
&= \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C, \\
\int \frac{2}{x}dx &= 2\int \frac{1}{x}dx=2\ln|x|+C, \\
\int \left(x-3e^x\right)dx &= \int xdx-3\int e^x dx=\frac{1}{2}x^2-3e^x+C.
\end{aligned}$$

Međutim

$$\int xe^x dx =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx,\ \int \frac{2}{x}dx,\ \int \left(x-3e^x\right)dx,\ \int xe^x dx.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx &= \int x^2dx+\int \sqrt{x}dx=\int x^2dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx= \\
&= \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C, \\
\int \frac{2}{x}dx &= 2\int \frac{1}{x}dx=2\ln|x|+C, \\
\int \left(x-3e^x\right)dx &= \int xdx-3\int e^x dx=\frac{1}{2}x^2-3e^x+C.
\end{aligned}$$

Međutim

$$\int xe^x dx = ?$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx,\ \int \frac{2}{x}dx,\ \int \left(x-3e^x\right)dx,\ \int xe^x dx.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx &= \int x^2dx+\int \sqrt{x}dx=\int x^2dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx= \\
&= \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C, \\
\int \frac{2}{x}dx &= 2\int \frac{1}{x}dx=2\ln|x|+C, \\
\int \left(x-3e^x\right)dx &= \int xdx-3\int e^x dx=\frac{1}{2}x^2-3e^x+C.
\end{aligned}$$

Međutim

$$\int xe^x dx = ?\ (\text{ne vrijedi } = \int xdx\cdot\int e^x dx)$$

Neodređeni integral

Zadatak. Odredi

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx,\ \int \tfrac{2}{x}dx,\ \int \left(x-3e^x\right)dx,\ \int xe^x dx.$$

Rješenje. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\int \left(x^2+\sqrt{x}\right)dx &= \int x^2dx+\int \sqrt{x}dx=\int x^2dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx= \\
&= \tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C, \\
\int \tfrac{2}{x}dx &= 2\int \tfrac{1}{x}dx=2\ln|x|+C, \\
\int \left(x-3e^x\right)dx &= \int xdx-3\int e^x dx=\tfrac{1}{2}x^2-3e^x+C.
\end{aligned}$$

Međutim

$$\int xe^x dx = ?\ (\text{ne vrijedi } = \int xdx\cdot\int e^x dx)$$

jer **nemamo pravilo** za integriranje umnoška!

Neodređeni integral

Još jedan problem kod integriranja.

Neodređeni integral

Još jedan problem kod integriranja.

- kod deriviranja vrijedi:

Neodređeni integral

Još jedan problem kod integriranja.

- kod deriviranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow f'(x) \text{ je elementarna}$$

Neodređeni integral

Još jedan problem kod integriranja.

- kod deriviranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow f'(x) \text{ je elementarna}$$

- kod integriranja vrijedi:

Neodređeni integral

Još jedan problem kod integriranja.

- kod deriviranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow f'(x) \text{ je elementarna}$$

- kod integriranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow F(x) \underline{\textbf{ne mora biti}} \text{ elementarna}$$

Neodređeni integral

Još jedan problem kod integriranja.

- kod deriviranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow f'(x) \text{ je elementarna}$$

- kod integriranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow F(x) \underline{\textbf{ne mora biti}} \text{ elementarna}$$

Uvodimo nazive:

Neodređeni integral

Još jedan problem kod integriranja.

- kod deriviranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow f'(x) \text{ je elementarna}$$

- kod integriranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow F(x) \underline{\textbf{ne mora biti}} \text{ elementarna}$$

Uvodimo nazive: ako za funkciju $f(x)$ njena primitivna funkcija:

Neodređeni integral

Još jedan problem kod integriranja.

- kod deriviranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow f'(x) \text{ je elementarna}$$

- kod integriranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow F(x) \underline{\textbf{ne mora biti}} \text{ elementarna}$$

Uvodimo nazive: ako za funkciju $f(x)$ njena primitivna funkcija:

- jest elementarna,

Neodređeni integral

Još jedan problem kod integriranja.

- kod deriviranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow f'(x) \text{ je elementarna}$$

- kod integriranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow F(x) \underline{\textbf{ne mora biti}} \text{ elementarna}$$

Uvodimo nazive: ako za funkciju $f(x)$ njena primitivna funkcija:

- jest elementarna, onda kažemo da je $\int f(x)dx$ elementarno rješiv,

Neodređeni integral

Još jedan problem kod integriranja.

- kod deriviranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow f'(x) \text{ je elementarna}$$

- kod integriranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow F(x) \underline{\textbf{ne mora biti}} \text{ elementarna}$$

Uvodimo nazive: ako za funkciju $f(x)$ njena primitivna funkcija:

- jest elementarna, onda kažemo da je $\int f(x)dx$ elementarno rješiv,
- nije elementarna,

Neodređeni integral

Još jedan problem kod integriranja.

- kod deriviranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow f'(x) \text{ je elementarna}$$

- kod integriranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow F(x) \underline{\textbf{ne mora biti}} \text{ elementarna}$$

Uvodimo nazive: ako za funkciju $f(x)$ njena primitivna funkcija:

- jest elementarna, onda kažemo da je $\int f(x)dx$ elementarno rješiv,
- nije elementarna, onda kažemo da je $\int f(x)dx$ elementarno nerješiv.

Neodređeni integral

Još jedan problem kod integriranja.

- kod deriviranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow f'(x) \text{ je elementarna}$$

- kod integriranja vrijedi:

$$f(x) \text{ je elementarna } \Rightarrow F(x) \underline{\textbf{ne mora biti}} \text{ elementarna}$$

Uvodimo nazive: ako za funkciju $f(x)$ njena primitivna funkcija:

- jest elementarna, onda kažemo da je $\int f(x)dx$ elementarno rješiv,
- nije elementarna, onda kažemo da je $\int f(x)dx$ elementarno nerješiv.

Primjeri elementarno nerješivih integrala su

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int e^{x^2} dx, \quad \int \frac{1}{\ln x} dx.$$

Za elementarne funkcije vrijedi:

Za elementarne funkcije vrijedi:

1) neke elementarne funkcije se mogu integrirati korištenjem tablice i 2 pravila za računske operacije:

Za elementarne funkcije vrijedi:

1) neke elementarne funkcije se mogu integrirati korištenjem tablice i 2 pravila za računske operacije:
   - neposredno integriranje,

Za elementarne funkcije vrijedi:

1) neke elementarne funkcije se mogu integrirati korištenjem tablice i 2 pravila za računske operacije:
   - neposredno integriranje,
2) ostale elementarne funkcije se integriraju (ako se to može) nekom od metoda integracije:

Za elementarne funkcije vrijedi:

1) neke elementarne funkcije se mogu integrirati korištenjem tablice i 2 pravila za računske operacije:
   - neposredno integriranje,
2) ostale elementarne funkcije se integriraju (ako se to može) nekom od metoda integracije:
   - metoda supstitucije,

Za elementarne funkcije vrijedi:

1) neke elementarne funkcije se mogu integrirati korištenjem tablice i 2 pravila za računske operacije:
   - neposredno integriranje,
2) ostale elementarne funkcije se integriraju (ako se to može) nekom od metoda integracije:
   - metoda supstitucije,
   - metoda parcijalne integracije,

Za elementarne funkcije vrijedi:

1) neke elementarne funkcije se mogu integrirati korištenjem tablice i 2 pravila za računske operacije:
   - neposredno integriranje,
2) ostale elementarne funkcije se integriraju (ako se to može) nekom od metoda integracije:
   - metoda supstitucije,
   - metoda parcijalne integracije,
   - metoda integriranja racionalnih funkcija,

Za elementarne funkcije vrijedi:

1) neke elementarne funkcije se mogu integrirati korištenjem tablice i 2 pravila za računske operacije:
   - neposredno integriranje,
2) ostale elementarne funkcije se integriraju (ako se to može) nekom od metoda integracije:
   - metoda supstitucije,
   - metoda parcijalne integracije,
   - metoda integriranja racionalnih funkcija,
   - različite metode integriranja iracionalnih funkcija,

Za elementarne funkcije vrijedi:

1) neke elementarne funkcije se mogu integrirati korištenjem tablice i 2 pravila za računske operacije:
   - neposredno integriranje,
2) ostale elementarne funkcije se integriraju (ako se to može) nekom od metoda integracije:
   - metoda supstitucije,
   - metoda parcijalne integracije,
   - metoda integriranja racionalnih funkcija,
   - različite metode integriranja iracionalnih funkcija,
   - različite metode integriranja trigonometrijskih funkcija.

Neodređeni integral

Neposredno integriranje

Iako je integriranje složen postupak,

Neodređeni integral

Neposredno integriranje

Iako je integriranje složen postupak, postoje integrali koji se mogu riješiti poznavanjem:

Iako je integriranje složen postupak, postoje integrali koji se mogu riješiti poznavanjem:

- integrala osnovnih elementarnih funkcija,

Neodređeni integral

Neposredno integriranje

Iako je integriranje složen postupak, postoje integrali koji se mogu riješiti poznavanjem:

- integrala osnovnih elementarnih funkcija,
- pravila za integriranje dviju računskih operacija ("+" i "−"), te za množenje s konstantom.

Neodređeni integral

Neposredno integriranje

Iako je integriranje složen postupak, postoje integrali koji se mogu riješiti poznavanjem:

- integrala osnovnih elementarnih funkcija,
- pravila za integriranje dviju računskih operacija ("+" i "−"), te za množenje s konstantom.

Takav postupak integriranja naziva se neposredno integriranje.

Neodređeni integral

Metoda supstitucije

Složeniji integrali se često rješavaju jednom od dvije varijante metode supstitucije.

Složeniji integrali se često rješavaju jednom od dvije varijante metode supstitucije. Metoda supstitucije se provodi tako da se:

Složeniji integrali se često rješavaju jednom od dvije varijante metode supstitucije. Metoda supstitucije se provodi tako da se:

1. dopustivom zamjenom varijable integracije nekim analitičkim izrazom, ili

Neodređeni integral

Metoda supstitucije

Složeniji integrali se često rješavaju jednom od dvije varijante metode supstitucije. Metoda supstitucije se provodi tako da se:

1. dopustivom zamjenom varijable integracije nekim analitičkim izrazom, ili
2. dopustivom zamjenom nekog analitičkog izraza u podintegralnoj funkciji novom varijablom,

Neodređeni integral

Metoda supstitucije

Složeniji integrali se često rješavaju jednom od dvije varijante metode supstitucije. Metoda supstitucije se provodi tako da se:

1. dopustivom zamjenom varijable integracije nekim analitičkim izrazom, ili
2. dopustivom zamjenom nekog analitičkog izraza u podintegralnoj funkciji novom varijablom,

zadani integral svede na tablični integral.

Neodređeni integral

Teorem.

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija.

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval,

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\varphi : J \to I$ obostrano derivabilna bijekcija

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\varphi : J \to I$ obostrano derivabilna bijekcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\varphi : J \to I$ obostrano derivabilna bijekcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t)$$

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\varphi : J \to I$ obostrano derivabilna bijekcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t)$$

za svaki $t \in J$.

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\varphi : J \to I$ obostrano derivabilna bijekcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t)$$

za svaki $t \in J$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\varphi : J \to I$ obostrano derivabilna bijekcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t)$$

za svaki $t \in J$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

onda je

$$\int f(x)dx \quad =$$

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\varphi : J \to I$ obostrano derivabilna bijekcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t)$$

za svaki $t \in J$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

onda je

$$\int f(x)dx \quad = \quad \left\{ \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} =$$

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\varphi : J \to I$ obostrano derivabilna bijekcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t)$$

za svaki $t \in J$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

onda je

$$\int f(x)dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt =$$

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\varphi : J \to I$ obostrano derivabilna bijekcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t)$$

za svaki $t \in J$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

onda je

$$\int f(x)dx = \left\{ \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int g(t)dt =$$

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\varphi : J \to I$ obostrano derivabilna bijekcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t)$$

za svaki $t \in J$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

onda je

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int g(t)dt = \\ &= G(t) + C =\end{aligned}$$

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\varphi : J \to I$ obostrano derivabilna bijekcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = g(t)$$

za svaki $t \in J$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

onda je

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int g(t)dt = \\ &= G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C\end{aligned}$$

Neodređeni integral

Zadatak.

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx.$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx.$$

Rješenje.

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx \quad =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\ dt \end{array} \right\} =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\ dt \end{array} \right\} = \int \frac{\sin t}{2t} 2t\ dt =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\ dt \end{array} \right\} = \int \frac{\sin t}{2t} 2t\ dt = \int \sin t\ dt =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\ dt \end{array} \right\} = \int \frac{\sin t}{2t} 2t\ dt = \int \sin t\ dt = \\ &= -\cos t + C =\end{aligned}$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\ dt \end{array} \right\} = \int \frac{\sin t}{2t} 2t\ dt = \int \sin t\ dt = \\ &= -\cos t + C = -\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\ dt \end{array} \right\} = \int \frac{\sin t}{2t} 2t\ dt = \int \sin t\ dt = \\ &= -\cos t + C = -\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x) =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\ dt \end{array} \right\} = \int \frac{\sin t}{2t} 2t\ dt = \int \sin t\ dt = \\ &= -\cos t + C = -\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}},$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\ dt \end{array} \right\} = \int \frac{\sin t}{2t} 2t\ dt = \int \sin t\ dt = \\ &= -\cos t + C = -\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}},\ \varphi(t) =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\ dt \end{array} \right\} = \int \frac{\sin t}{2t} 2t\ dt = \int \sin t\ dt = \\ &= -\cos t + C = -\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}},\ \varphi(t) = t^2,$$

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx &= \left\{\begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\ dt \end{array}\right\} = \int \frac{\sin t}{2t} 2t\ dt = \int \sin t\ dt = \\ &= -\cos t + C = -\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}},\ \varphi(t) = t^2,\ g(t) =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\ dt \end{array} \right\} = \int \frac{\sin t}{2t} 2t\ dt = \int \sin t\ dt = \\ &= -\cos t + C = -\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}},\ \varphi(t) = t^2,\ g(t) = \sin t$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx &= \left\{\begin{array}{c} x=t^2 \\ dx=2t\ dt \end{array}\right\} = \int \frac{\sin t}{2t}2t\ dt = \int \sin t\ dt = \\ &= -\cos t + C = -\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x)=\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}},\ \varphi(t)=t^2,\ g(t)=\sin t \text{ i } G(t)=$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx &= \left\{\begin{array}{c} x=t^2 \\ dx=2t\ dt \end{array}\right\} = \int \frac{\sin t}{2t}2t\ dt = \int \sin t\ dt = \\ &= -\cos t + C = -\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x)=\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}},\ \varphi(t)=t^2,\ g(t)=\sin t \text{ i } G(t)=-\cos t.$$

Neodređeni integral

Teorem.

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija.

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval,

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\psi : I \longrightarrow J$ derivabilna funkcija i

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\psi : I \to J$ derivabilna funkcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\psi : I \to J$ derivabilna funkcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$$

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\psi : I \to J$ derivabilna funkcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$$

za svaki $x \in I$.

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\psi : I \to J$ derivabilna funkcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$$

za svaki $x \in I$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\psi : I \to J$ derivabilna funkcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$$

za svaki $x \in I$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

onda je

$$\int f(x)dx \quad =$$

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\psi : I \to J$ derivabilna funkcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$$

za svaki $x \in I$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

onda je

$$\int f(x)dx = \int g(\psi(x))\psi'(x)dx =$$

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\psi : I \to J$ derivabilna funkcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$$

za svaki $x \in I$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

onda je

$$\int f(x)dx = \int g(\psi(x))\psi'(x)dx = \left\{ \begin{array}{c} \psi(x) = t \\ \psi'(x)dx = dt \end{array} \right\} =$$

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\psi : I \to J$ derivabilna funkcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$$

za svaki $x \in I$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

onda je

$$\int f(x)dx = \int g(\psi(x))\psi'(x)dx = \left\{ \begin{array}{c} \psi(x) = t \\ \psi'(x)dx = dt \end{array} \right\} = \int g(t)dt =$$

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\psi : I \to J$ derivabilna funkcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$$

za svaki $x \in I$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

onda je

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int g(\psi(x))\psi'(x)dx = \left\{ \begin{array}{c} \psi(x) = t \\ \psi'(x)dx = dt \end{array} \right\} = \int g(t)dt = \\ &= G(t) + C = \end{aligned}$$

Neodređeni integral

Teorem. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je J interval, te neka su $\psi : I \to J$ derivabilna funkcija i $g : J \to \mathbb{R}$ funkcija takve da je

$$f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$$

za svaki $x \in I$. Ako je

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

onda je

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int g(\psi(x))\psi'(x)dx = \left\{ \begin{array}{c} \psi(x) = t \\ \psi'(x)dx = dt \end{array} \right\} = \int g(t)dt = \\ &= G(t) + C = G(\psi(x)) + C \end{aligned}$$

Neodređeni integral

Zadatak.

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Rješenje.

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\int 2x \cos x^2 \, dx \quad =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\int 2x \cos x^2 \, dx = \left\{ \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{array} \right\} =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\int 2x \cos x^2 \, dx = \left\{ \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{array} \right\} = \int \cos t \, dt =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\int 2x \cos x^2 \, dx = \left\{ \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{array} \right\} = \int \cos t \, dt = \sin t + C$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \int 2x \cos x^2 \, dx &= \left\{ \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{array} \right\} = \int \cos t \, dt = \sin t + C \\ &= \sin x^2 + C \end{aligned}$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \int 2x \cos x^2 \, dx &= \left\{ \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{array} \right\} = \int \cos t \, dt = \sin t + C \\ &= \sin x^2 + C \end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x) =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \int 2x \cos x^2 \, dx &= \left\{ \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{array} \right\} = \int \cos t \, dt = \sin t + C \\ &= \sin x^2 + C \end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x) = 2x \cos x^2,$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \int 2x \cos x^2 \, dx &= \left\{ \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{array} \right\} = \int \cos t \, dt = \sin t + C \\ &= \sin x^2 + C \end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x) = 2x \cos x^2, \ \psi(x) =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \int 2x \cos x^2 \, dx &= \left\{ \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{array} \right\} = \int \cos t \, dt = \sin t + C \\ &= \sin x^2 + C \end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x) = 2x \cos x^2, \ \psi(x) = x^2,$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \int 2x \cos x^2 \, dx &= \left\{ \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{array} \right\} = \int \cos t \, dt = \sin t + C \\ &= \sin x^2 + C \end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x) = 2x \cos x^2, \ \psi(x) = x^2, \ g(t) =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \int 2x \cos x^2 \, dx &= \left\{ \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{array} \right\} = \int \cos t \, dt = \sin t + C \\ &= \sin x^2 + C \end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x) = 2x \cos x^2, \ \psi(x) = x^2, \ g(t) = \cos t$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \int 2x \cos x^2 \, dx &= \left\{ \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{array} \right\} = \int \cos t \, dt = \sin t + C \\ &= \sin x^2 + C \end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x) = 2x \cos x^2, \ \psi(x) = x^2, \ g(t) = \cos t \text{ i } G(t) =$$

Neodređeni integral

Zadatak. Izračunaj

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

Rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} \int 2x \cos x^2 \, dx &= \left\{ \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{array} \right\} = \int \cos t \, dt = \sin t + C \\ &= \sin x^2 + C \end{aligned}$$

Uočimo da je u ovom primjeru

$$f(x) = 2x \cos x^2, \ \psi(x) = x^2, \ g(t) = \cos t \text{ i } G(t) = \sin t.$$

Neodređeni integral

Metoda parcijalne integracije

Metoda se sastoji u tome da se odabere **prikladan rastav** podintegralne funkcije

$$\int f(x)dx =$$

Metoda se sastoji u tome da se odabere **prikladan rastav** podintegralne funkcije

$$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx =$$

Metoda se sastoji u tome da se odabere **prikladan rastav** podintegralne funkcije

$$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = \int u(x)d(v(x)),$$

Metoda se sastoji u tome da se odabere **prikladan rastav** podintegralne funkcije

$$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = \int u(x)d(v(x)),$$

te na tako napisan integral primijeni sljedeći teorem.

Metoda se sastoji u tome da se odabere **prikladan rastav** podintegralne funkcije

$$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = \int u(x)d(v(x)),$$

te na tako napisan integral primijeni sljedeći teorem.

Teorem.

Metoda se sastoji u tome da se odabere **prikladan rastav** podintegralne funkcije

$$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = \int u(x)d(v(x)),$$

te na tako napisan integral primijeni sljedeći teorem.

Teorem. Neka su $u, v : I \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne na intervalu I.

Metoda se sastoji u tome da se odabere **prikladan rastav** podintegralne funkcije

$$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = \int u(x)d(v(x)),$$

te na tako napisan integral primijeni sljedeći teorem.

Teorem. Neka su $u, v : I \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne na intervalu I. Tada vrijedi

$$\int u(x)d(v(x)) =$$

Metoda se sastoji u tome da se odabere **prikladan rastav** podintegralne funkcije

$$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = \int u(x)d(v(x)),$$

te na tako napisan integral primijeni sljedeći teorem.

Teorem. Neka su $u, v : I \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne na intervalu I. Tada vrijedi

$$\int u(x)d(v(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x)).$$

Metoda se sastoji u tome da se odabere **prikladan rastav** podintegralne funkcije

$$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = \int u(x)d(v(x)),$$

te na tako napisan integral primijeni sljedeći teorem.

Teorem. Neka su $u, v : I \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne na intervalu I. Tada vrijedi

$$\int u(x)d(v(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x)).$$

Formula za pamtiti:

Metoda se sastoji u tome da se odabere **prikladan rastav** podintegralne funkcije

$$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = \int u(x)d(v(x)),$$

te na tako napisan integral primijeni sljedeći teorem.

Teorem. Neka su $u, v : I \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne na intervalu I. Tada vrijedi

$$\int u(x)d(v(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x)).$$

Formula za pamtiti: $\int udv = uv - \int vdu$.

Neodređeni integral

Formula za pamtiti: $\int udv = uv - \int vdu$.

Neodređeni integral

Formula za pamtiti: $\int udv = uv - \int vdu$.

Pitanje.

Neodređeni integral

Formula za pamtiti: $\int u dv = uv - \int v du$.

Pitanje. Kako odabrati u i dv?

Neodređeni integral

Formula za pamtiti: $\int udv = uv - \int vdu$.

Pitanje. Kako odabrati u i dv?
Uputa.

Neodređeni integral

Formula za pamtiti: $\int u dv = uv - \int v du$.

Pitanje. Kako odabrati u i dv?
Uputa. Za funkciju u obično biramo onaj dio podintegralne funkcije:

Neodređeni integral

Formula za pamtiti: $\int udv = uv - \int vdu$.

Pitanje. Kako odabrati u i dv?
Uputa. Za funkciju u obično biramo onaj dio podintegralne funkcije:

1. kojeg ne možemo integrirati,

Neodređeni integral

Formula za pamtiti: $\int udv = uv - \int vdu$.

Pitanje. Kako odabrati u i dv?
Uputa. Za funkciju u obično biramo onaj dio podintegralne funkcije:

1. kojeg ne možemo integrirati, ili
2. koji se pojednostavnjuje deriviranjem.

Potrebno je odrediti integral

$$\int \frac{p_m(x)}{q_n(x)}\,dx.$$

Potrebno je odrediti integral

$$\int \frac{p_m(x)}{q_n(x)}\,dx.$$

Podintegralna racionalna funkcija se postupcima:

Potrebno je odrediti integral

$$\int \frac{p_m(x)}{q_n(x)}\,dx.$$

Podintegralna racionalna funkcija se postupcima:

1. dijeljenja polinoma (ako je racionalna funkcija neprava),

Potrebno je odrediti integral

$$\int \frac{p_m(x)}{q_n(x)}\,dx.$$

Podintegralna racionalna funkcija se postupcima:

1. dijeljenja polinoma (ako je racionalna funkcija neprava),te
2. rastava na parcijalne razlomke,

Potrebno je odrediti integral

$$\int \frac{p_m(x)}{q_n(x)}\,dx.$$

Podintegralna racionalna funkcija se postupcima:

1. dijeljenja polinoma (ako je racionalna funkcija neprava),te
2. rastava na parcijalne razlomke,

svodi na zbroj integrala polinoma i integrala oblika

Potrebno je odrediti integral

$$\int \frac{p_m(x)}{q_n(x)}\,dx.$$

Podintegralna racionalna funkcija se postupcima:

1. dijeljenja polinoma (ako je racionalna funkcija neprava),te
2. rastava na parcijalne razlomke,

svodi na zbroj integrala polinoma i integrala oblika

$$\int \frac{1}{(x+a)^n}\,dx, \quad \int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n}\,dx, \quad \int \frac{cx+d}{(x^2+ax+b)^n}\,dx.$$

Potrebno je odrediti integral

$$\int \frac{p_m(x)}{q_n(x)}\,dx.$$

Podintegralna racionalna funkcija se postupcima:

1. dijeljenja polinoma (ako je racionalna funkcija neprava),te
2. rastava na parcijalne razlomke,

svodi na zbroj integrala polinoma i integrala oblika

$$\int \frac{1}{(x+a)^n}\,dx, \quad \int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n}\,dx, \quad \int \frac{cx+d}{(x^2+ax+b)^n}\,dx.$$

koji se rješavaju svođenjem nazivnika na potpuni kvadrat, pa supstitucijom.

Neodređeni integral

Ako je $n \geq 2$,

Neodređeni integral

Ako je $n \geq 2$, za rješavanje drugog od ova tri integrala potrebna je sljedeća rekurzivna formula

Neodređeni integral

Ako je $n \geq 2$, za rješavanje drugog od ova tri integrala potrebna je sljedeća rekurzivna formula

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx.$$

Neodređeni integral

Ako je $n \geq 2$, za rješavanje drugog od ova tri integrala potrebna je sljedeća rekurzivna formula

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx.$$

Izvod i primjena formule mogu se pronaći u literaturi (I. Slapničar: Matematika 2 - predavanja).

Integrali oblika

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx, \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Integrali oblika

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx, \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

mogu se riješiti:

Integrali oblika

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx, \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

mogu se riješiti:

- parcijalnom integracijom,

Integrali oblika

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx, \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

mogu se riješiti:

- parcijalnom integracijom,
- trigonometrijskim supstitucijama, redom su to

$$x = a\,\mathrm{tg}\,t, \quad x = \frac{a}{\sin t}, \quad x = a\sin t.$$

Integrali oblika

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx, \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

mogu se riješiti:

- parcijalnom integracijom,
- trigonometrijskim supstitucijama, redom su to

$$x = a\,\mathrm{tg}\,t, \quad x = \frac{a}{\sin t}, \quad x = a\sin t.$$

Obično je rješavanje trigonometrijskim supstitucijama složenije,

Integrali oblika

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx, \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

mogu se riješiti:

- parcijalnom integracijom,
- trigonometrijskim supstitucijama, redom su to

$$x = a\,\mathrm{tg}\,t, \quad x = \frac{a}{\sin t}, \quad x = a\sin t.$$

Obično je rješavanje trigonometrijskim supstitucijama složenije, osim eventualno kod trećeg integrala.