1.8. Za zadanu konstrukciju potrebno je napisati analitički izraz za jednadžbu elastične linije i kuta zaokreta tangente na elastičnu liniju, kao i odrediti vrijednost progiba ispod točke "C" i kuta zaokreta u točki "D".

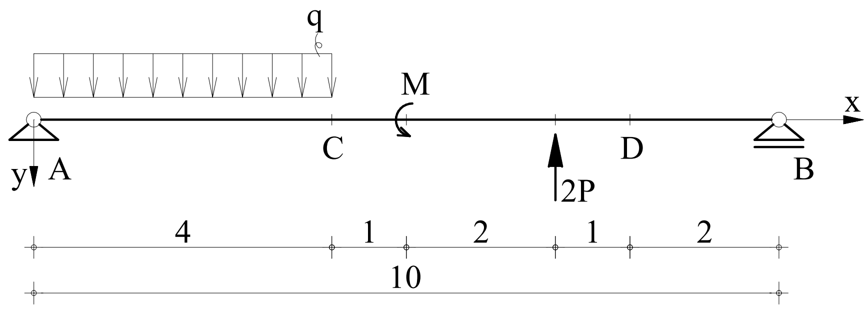
$I = 8 \cdot 10^4 \, cm^4$

$E = 20 \cdot 10^3 \, \frac{kN}{cm^2}$

$q = 30 kN/m'$

$M = 50 kNm$

$P = 30 kN$



Reakcije na stvarnom nosaču:

$$\sum M_A = 0$$
$$q \cdot 4 \cdot 2 - M - 2P \cdot 7 - R_B \cdot 10 = 0$$
$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 - M - 2P \cdot 7}{10} = -23 kN$$

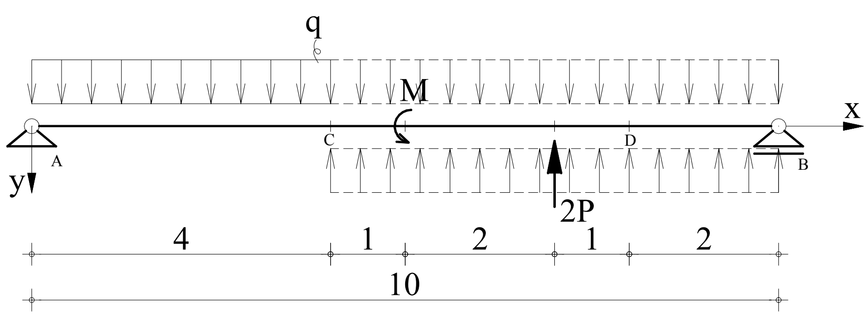
$$\sum M_B = 0$$
$$R_A \cdot 10 - q \cdot 4 \cdot 8 - M + 2P \cdot 3 = 0$$
$$R_A = \frac{q \cdot 4 \cdot 8 + M - 2P \cdot 3}{10} = 83 kN$$

Jednadžba elastične linije

Jednadžbe za elastičnu liniju; kut zaokreta i progib, se mogu dobiti iz neposrednog integriranja jednadžbe:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_z}{E \cdot I_z} \tag{1}$$

Kako bi dobili jedinstvenu jednadžbu momenata nad cijelom dužinom nosača potrebno je napraviti statički ekvivalentni sustav na način da kontinuirano opterećenje produžimo do kraja nosača, ali i dodamo kontinuirano opterećenje istog iznosa, ali obrnutog smjera djelovanja.



$$M_z = R_A \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} + q \cdot \frac{(x-4)^2}{2} - M \cdot (x-5)^0 + 2P \cdot (x-7) \tag{2}$$

Jednadžbu (2) možemo uvrstiti u jednadžbu (1), te možemo pristupiti uzastopnoj integraciji kako bi dobili analitičko rješenje progibne linije i kuta zaokreta.

$$E \cdot I_z \frac{d^2w}{dx^2} = -R_A \cdot x + q \cdot \frac{x^2}{2} - q \cdot \frac{(x-4)^2}{2} + M \cdot (x-5)^0 - 2P \cdot (x-7) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\left. E \cdot I_z \frac{d^2w}{dx^2} = -R_A \cdot x + q \cdot \frac{x^2}{2} - q \cdot \frac{(x-4)^2}{2} + M \cdot (x-5)^0 - 2P \cdot (x-7) \right|^{\int} \\ &E \cdot I_z \frac{dw}{dx} = E \cdot I_z \cdot \varphi = -R_A \cdot \frac{x^2}{2} + q \cdot \frac{x^3}{6} - q \cdot \frac{(x-4)^3}{6} + M \cdot (x-5)^1 - 2P \cdot \frac{(x-7)^2}{2} + C \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\left. E \cdot I_z \frac{dw}{dx} = -R_A \cdot \frac{x^2}{2} + q \cdot \frac{x^3}{6} - q \cdot \frac{(x-4)^3}{6} + M \cdot (x-5)^1 - 2P \cdot \frac{(x-7)^2}{2} + C \right|^{\int} \\ &E \cdot I_z \cdot w = -R_A \cdot \frac{x^3}{6} + q \cdot \frac{x^4}{24} - q \cdot \frac{(x-4)^4}{24} + M \cdot \frac{(x-5)^2}{2} - 2P \cdot \frac{(x-7)^3}{6} + C \cdot x + D \end{aligned} \tag{5}$$

Rubni uvjeti

Integracijom smo dobili i dvije konstante "C" i "D". Vrijednost konstanti možemo odrediti iz rubnih uvjeta.
$x = 0 \Rightarrow w = 0$ - uvrstimo u jednadžbu (5) i dobivamo: $D = 0$

$x = L \Rightarrow w = 0$ - uvrstimo u jednadžbu (5)

Pri uvrštavanju je potrebno paziti da zanemarimo članove jednadžbe koji se nalaze iza udaljenosti x za koju uvrštavamo vrijednost progiba, tj. kuta zaokreta.

$$\begin{aligned} &0 = -R_A \cdot \frac{L^3}{6} + q \cdot \frac{L^4}{24} - q \cdot \frac{(L-4)^4}{24} + M \cdot \frac{(L-5)^2}{2} - 2P \cdot \frac{(L-7)^3}{6} + C \cdot L \\ &C = \frac{1}{L}(R_A \cdot \frac{L^3}{6} - q \cdot \frac{L^4}{24} + q \cdot \frac{(L-4)^4}{24} - M \cdot \frac{(L-5)^2}{2} + 2P \cdot \frac{(L-7)^3}{6}) \\ &C = \frac{1}{10m}(83kN \cdot \frac{(10m)^3}{6} - 30\frac{kN}{m} \cdot \frac{(10m)^4}{24} + 30\frac{kN}{m} \cdot \frac{(10m-4m)^4}{24} \\ &\quad -50kNm \cdot \frac{(10m-5m)^2}{2} + 2 \cdot 30kN \cdot \frac{(10m-7m)^3}{6}) \\ &C = 259.83kNm^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Analitičko riješenje

$$w = \frac{1}{E \cdot I_z}(-R_A \cdot \frac{x^3}{6} + q \cdot \frac{x^4}{24} - q \cdot \frac{(x-4)^4}{24} + M \cdot \frac{(x-5)^2}{2} - 2P \cdot \frac{(x-7)^3}{6} + 259.83kNm^2 \cdot x) \tag{7}$$

$$\varphi = \frac{1}{E \cdot I_z}(-R_A \cdot \frac{x^2}{2} + q \cdot \frac{x^3}{6} - q \cdot \frac{(x-4)^3}{6} + M \cdot (x-5)^1 - 2P \cdot \frac{(x-7)^2}{2} + 259.83kNm^2) \tag{8}$$

Traženi progibi i kutovi zaokreta

$$w_{x=4m} = w_C = \frac{1}{E \cdot I_z}(-R_A \cdot \frac{4^3}{6} + q \cdot \frac{4^4}{24} + C \cdot 4) = 0.29625cm$$

$$\begin{aligned} \varphi_{x=8m} = \varphi_D &= \frac{1}{E \cdot I_Z}(-R_A \cdot \frac{8^2}{2} + q \cdot \frac{8^3}{6} - q \cdot \frac{(8-4)^3}{6} + M \cdot (8-5)^1 - 2P \cdot \frac{(8-7)^2}{2} + C) = \\ &= 0.000226062\,rad \end{aligned}$$