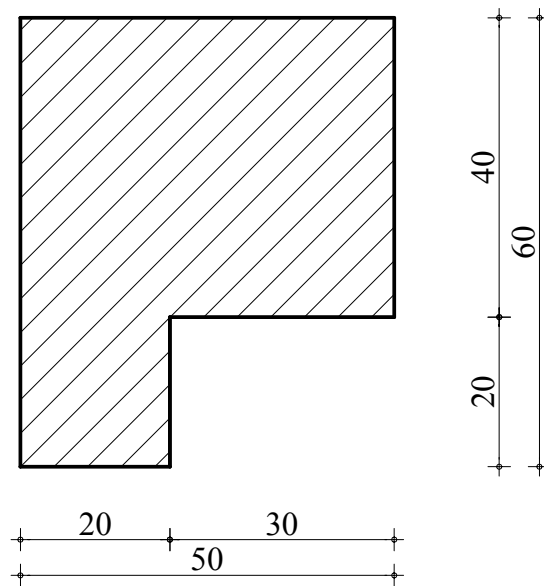
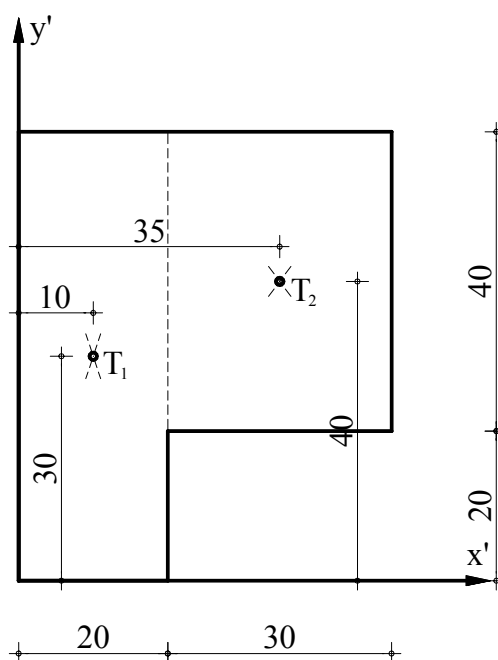


2.1. Za zadani presjek treba:

- Odrediti glavne osi tromosti analitički, te nacrtati elipsu tromosti
- Odrediti analitički jezgru presjeka
- Pomoću jezgre odrediti ekstremna naprezanja i nacrtati naprezanja u prostoj gredi, zadanog poprečnog presjeka, raspona  $L=8\text{m}$ . Na gredu djeluje kontinuirano opterećenje  $q$  u naznačenom smjeru  $\beta$ .
- Koristeći jezgru odrediti naprezanja i nacrtati dijagram naprezanja od djelovanja ekscentrične sile  $P=720\text{kN}$ , koja djeluje na koordinatama (s obzirom na glavne osi)  $(-6.0, -10.0)$ . Odrediti neutralnu os



**a) Glavne osi tromosti i elipsa tromosti**  
**Težište presjeka**



$$A_1 = 20 \cdot 60 = 1200 \text{cm}^2$$

$$A_2 = 30 \cdot 40 = 1200 \text{cm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 2400 \text{cm}^2$$

$$x_1 = 10$$

$$y_1 = 30$$

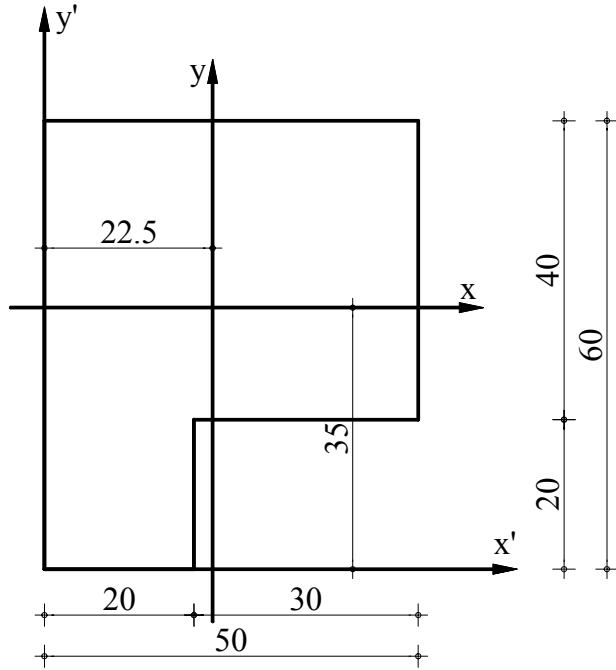
$$x_2 = 35$$

$$y_2 = 40$$

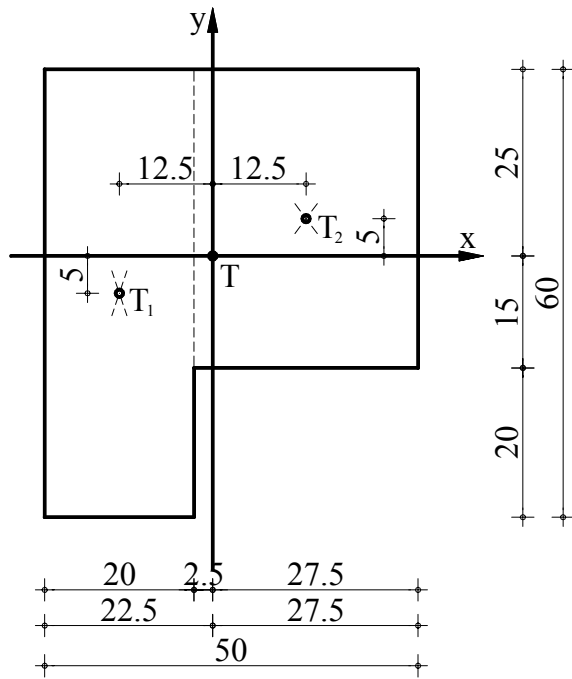
$$x_T = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A} = 22.5 \text{cm}$$

$$y_T = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A} = 35.0 \text{cm}$$

Dobivamo položaj težišta s obzirom na početni koordinatni sustav x'y'.



**Glavne osi tromosti presjeka**



$$\begin{aligned}
 I_x &= I_{x1} + I_{x2} = \\
 &= \frac{20 \cdot 60^3}{12} + 1200 \cdot (-5)^2 + \frac{30 \cdot 40^3}{12} + 1200 \cdot (5)^2 \\
 &= 580000 \text{cm}^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= I_{y1} + I_{y2} = \\
 &= \frac{60 \cdot 20^3}{12} + 1200 \cdot (-12.5)^2 + \frac{40 \cdot 30^3}{12} + 1200 \cdot (12.5)^2 \\
 &= 505000 \text{cm}^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= I_{xy1} + I_{xy2} = \\
 &= 0 + 1200 \cdot (-5) \cdot (-12.5) + 0 + 1200 \cdot (5) \cdot (12.5) \\
 &= 150000 \text{cm}^4
 \end{aligned}$$

Glavne osi tromosti su:

$$\begin{aligned}
 I_{u,v} &= \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \\
 &= 542500 \pm 154600 \text{cm}^4
 \end{aligned}$$

$$I_u = I_{\max} = 697100 \text{cm}^4$$

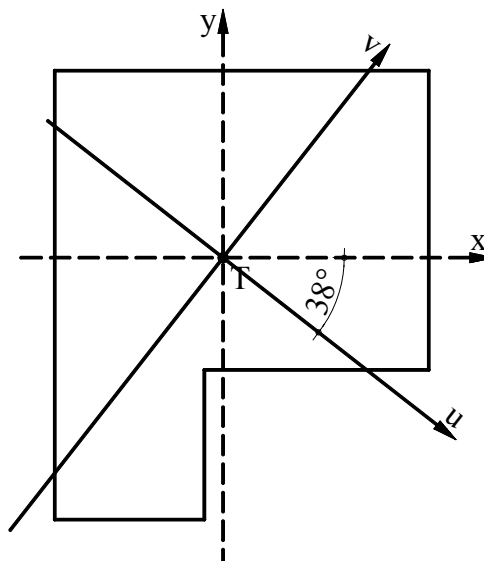
$$I_v = I_{\min} = 387900 \text{cm}^4$$

Kut nagiba glavnih osi

$$\text{tg}2\alpha = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2 \cdot 150000}{580000 - 505000} = -4.0$$

$$2\alpha = -75.96^\circ \approx -76^\circ$$

$$\alpha = -38^\circ$$

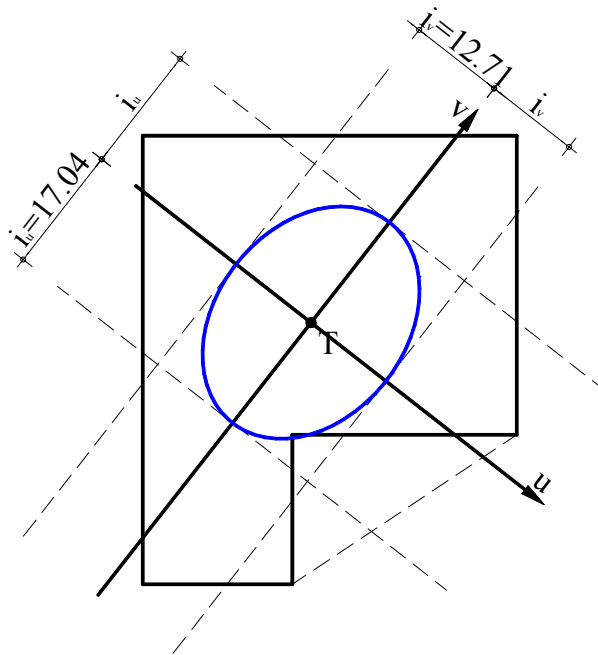


## Elipsa tromosti

Radijusi tromosti

$$i_u = i_{\max} = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{697000\text{cm}^4}{2400\text{cm}^2}} = 17.04\text{cm}$$

$$i_v = i_{\min} = \sqrt{\frac{I_v}{A}} = \sqrt{\frac{387000\text{cm}^4}{2400\text{cm}^2}} = 12.71\text{cm}$$



## b) Jezgra presjeka

### Koordinate karakterističnih rubnih točaka poprečnog presjeka

Da bi odredili jezgru presjeka potrebno je odrediti koordinate rubnih konturnih točaka poprečnog presjeka i to u koordinatnom sustavu glavnih osi tromosti.

Koordinate točaka u koordinatnom sustavu u-v se izračunavaju transformacijskom jednadžbama:

$$u = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$$

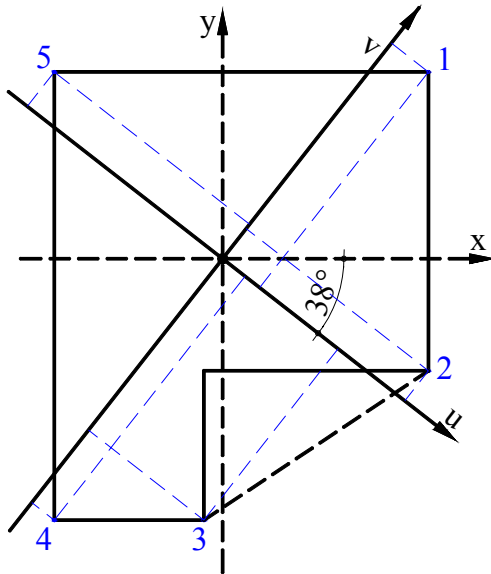
$$v = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha$$

TOČKA	x	y	u	v
1	27.5	25	+6.25	+36.61
2	27.5	-15	+30.89	+5.14
3	-2.5	-35	+19.59	-29.09
4	-22.5	-35	+3.86	-41.42
5	-22.5	25	-33.10	+5.80

Sada je potrebno odrediti odsječke pravaca (s i q) na osima u i v, a tijelo koje zatvaraju pravci čini jezgru poprečnog presjeka.

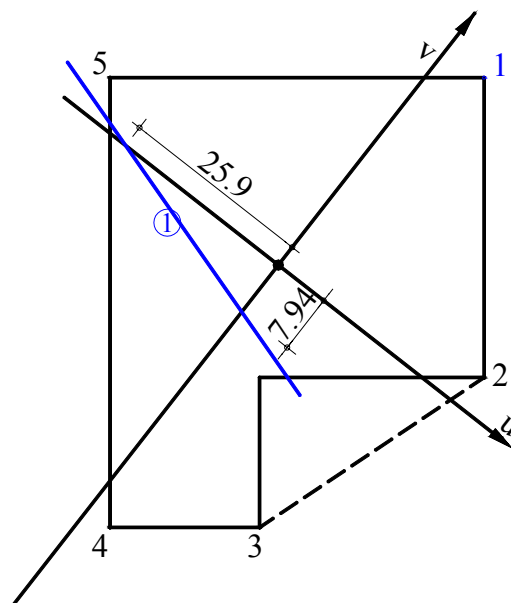
$$s = -\frac{i_v^2}{u}$$

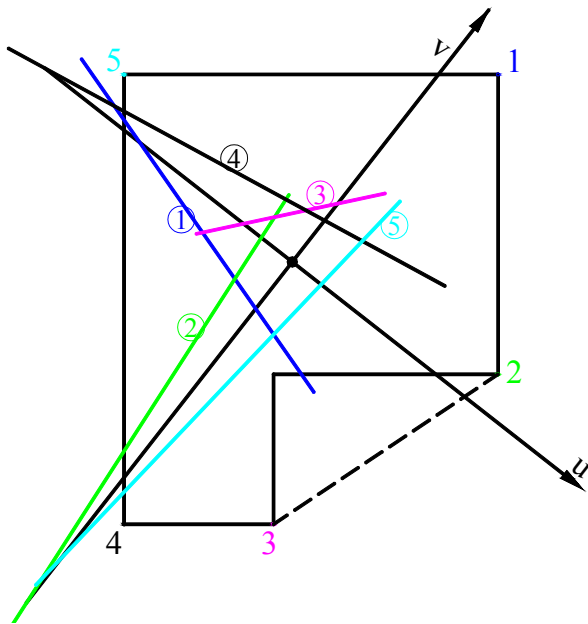
$$q = -\frac{i_u^2}{v}$$



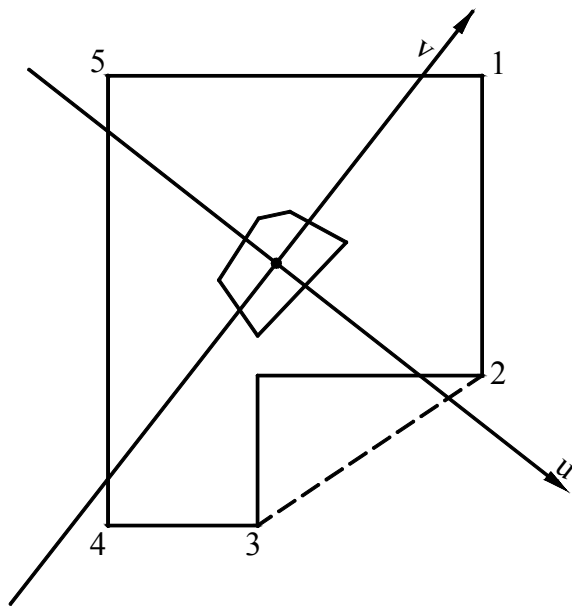
	$i_v^2 = 161.63\text{cm}^2$		$i_u^2 = 290.46\text{cm}^2$	
<b>TOČKA</b>	<b>u</b>	<b>s</b>	<b>v</b>	<b>q</b>
1	+6.25	<b>-25.90</b>	+36.61	<b>-7.94</b>
2	+30.89	<b>-5.25</b>	+5.14	<b>-57.70</b>
3	+19.59	<b>-8.27</b>	-29.09	<b>+9.88</b>
4	+3.86	<b>-41.95</b>	-41.42	<b>+7.01</b>
5	-33.10	<b>+4.89</b>	+5.80	<b>-50.20</b>

Sada je potrebno za svaku točku nacrtati pripadajući pravac, prema izračunatim odsječcima. Koordinatu "s" nanosimo na u-os, a "q" na v-os. Pravac 1 predstavlja neutralnu os za slučaj kada u točki 1 djeluje sila okomita na ravninu poprečnog presjeka.



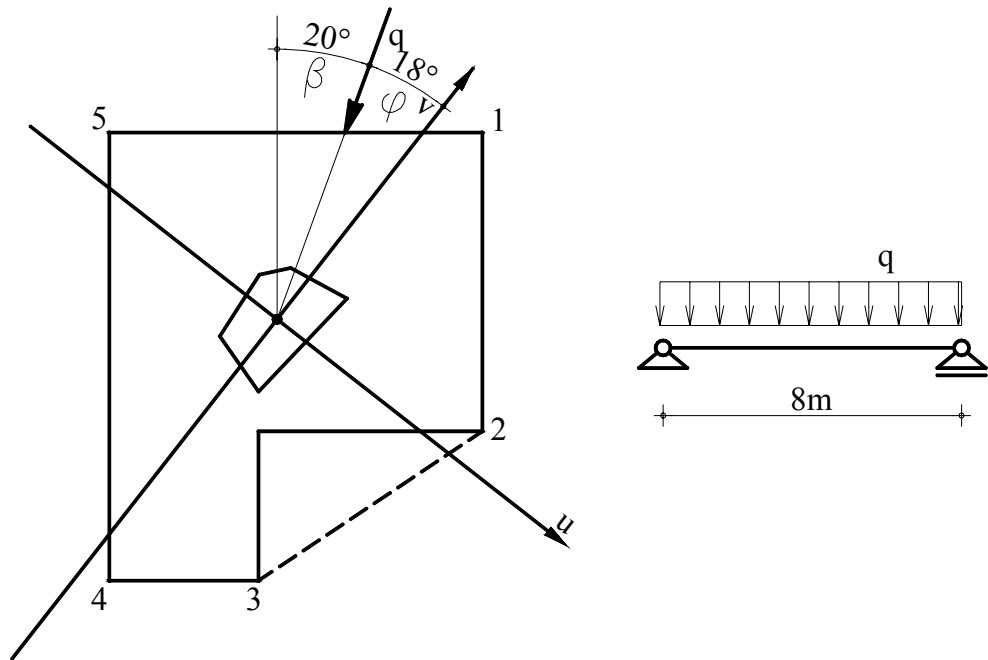


Nanoseći sve pravce dobivamo zatvoreno tijelo, a kada obrišemo višak, tijelo predstavlja jezgru poprečnog presjeka.



c) Normalna naprezanja na prostoj gredi od kontinuiranog opterećenja  $q$

Djelujući sustav



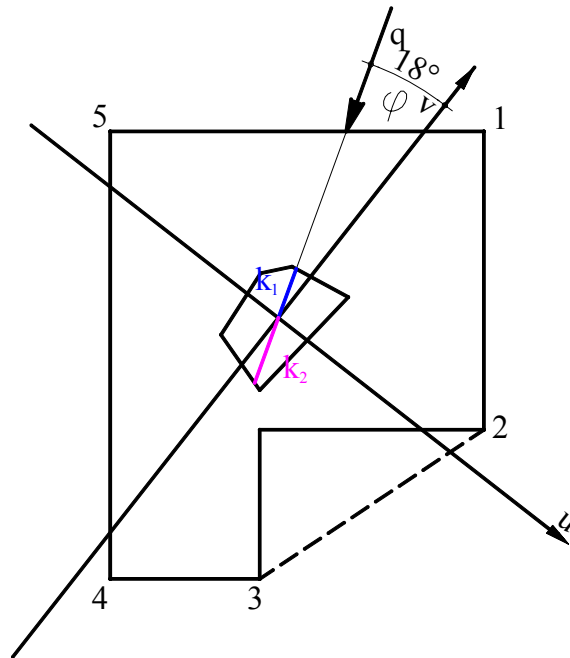
$\beta = 20^\circ$  - odklon opterećenja od vertikale  
 $\varphi = 18^\circ$  - odklon opterećenja od glavne osi

$q = 12\text{kN/m}$

$$M_{\max} = \frac{q \cdot L^2}{8} = \frac{12 \cdot 8^2}{8} = 96\text{kNm}$$

Problem ćemo riješiti koristeći jezgru presjeka. Potrebno je odmjeriti odsječke jezgre  $k_1$  i  $k_2$  koje čini ravnina djelovanja opterećenja, te uvrstiti izmjereno u formulu:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_{\max}}{k_{1,2} \cdot A}$$



$$k_1 = 6.99 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\text{vlak}} = \frac{M_{\max}}{k_1 \cdot A} = \frac{96 \text{ kNm}}{6.99 \text{ cm} \cdot 2400 \text{ cm}^2} = 0.572 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

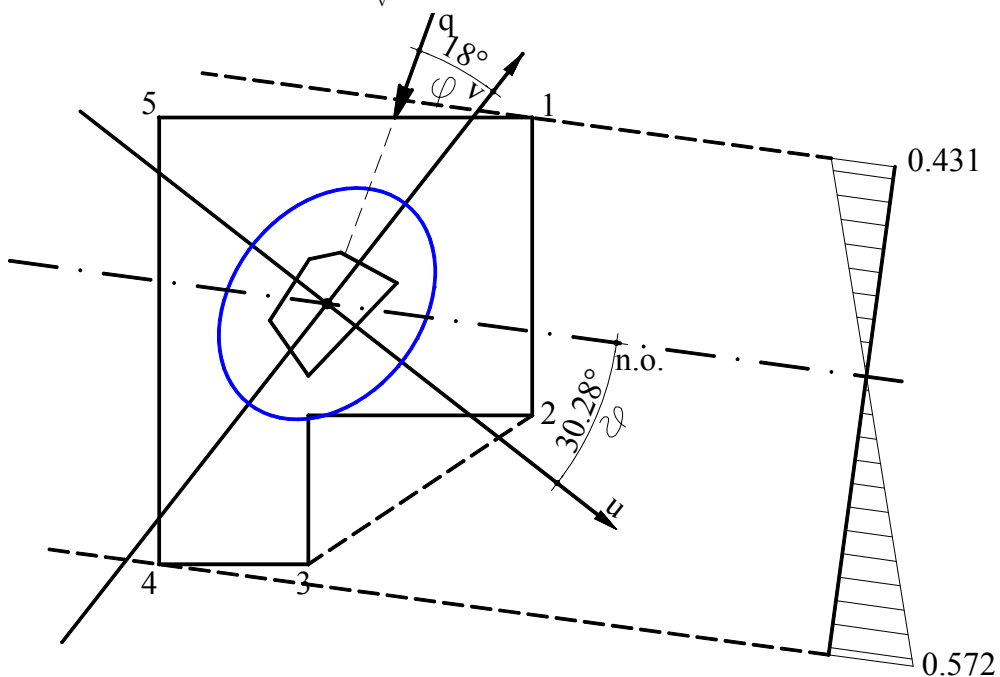
$$k_2 = 9.27 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\text{tlak}} = \frac{M_{\max}}{k_2 \cdot A} = \frac{96 \text{ kNm}}{9.27 \text{ cm} \cdot 2400 \text{ cm}^2} = 0.431 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Vlačno stanje naprezanja se nalazi s donje strane neutralne osi, a tlačno s gornje strane neutralne osi i da bi ih odredili uvrštavamo "suprotan" odsječak jezgre.

Kut neutralne osi prema glavnim osima dobivamo:

$$\text{tg } \vartheta = \text{tg } \varphi \frac{I_u}{I_v} = \text{tg } 18^\circ \frac{697100}{387900} = 0.584 \Rightarrow \vartheta = 30.28^\circ$$

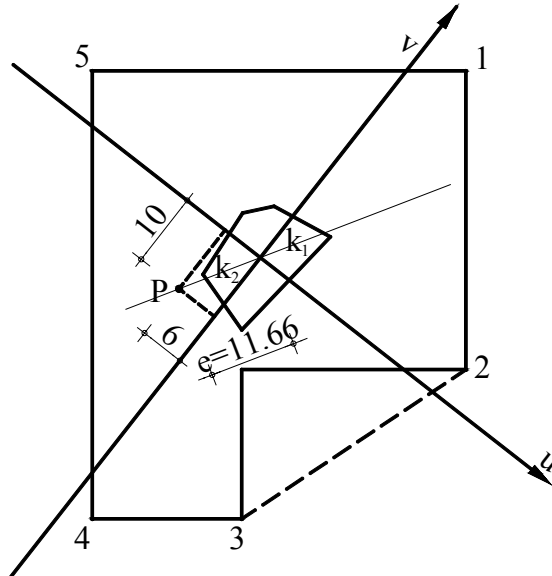




#### d) Normalna naprezanja na prostoj gredi od koncentrirane sile P

##### Djelujući sustav

Potrebno je povezati mjesto djelovanja sile tlačne P i težišta pravcem i odrediti odsječke jezgre  $k_1$  i  $k_2$ , kao i ekscentricitet  $e$  (vidi sliku)



te izmjerene vrijednosti uvrstiti u formulu:  $\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{P \cdot e}{A \cdot k_{1,2}} = \frac{P}{A} \left(1 \pm \frac{e}{k_{1,2}}\right)$

$$e = \sqrt{m^2 + n^2} = 11.66 \text{ cm}$$

$$k_1 = 9.086 \text{ cm}$$

$$k_2 = 7.821 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\text{tlak}} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{e}{k_1}\right) = \frac{720 \text{ kN}}{2400 \text{ cm}^2} \left(1 + \frac{11.66}{9.086}\right) = 0.685 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{\text{vlak}} = \frac{P}{A} \left(1 - \frac{e}{k_2}\right) = \frac{720 \text{ kN}}{2400 \text{ cm}^2} \left(1 - \frac{11.66}{7.821}\right) = -0.147 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Položaj neutralne osi možemo odrediti prema odsječcima  $s$  i  $q$ , ali kada uvrstimo koordinate djelovanja sile P.

$$s = -\frac{i_v^2}{u} = -\frac{161.54}{-6.0} = +26.92 \text{ cm}$$

$$q = -\frac{i_u^2}{v} = -\frac{290.36}{-10.0} = +29.04 \text{ cm}$$

