ANALIZA POUZDANOSTI HIDROTEHNIČKIH SUSTAVA

- **Osnovna zadaća pri procjeni inženjerske pouzdanosti je kvanticifiranje pouzdanosti inženjerskog sustava**

- **Nedostaci ili pogreške u projektiranju inženjerskih građevina uzrokuju određene poteškoće prilikom funkcioniranja istih.**

- **U ekstremnom slučaju dolazi do rušenja ili ispadanja iz pogona.**

Uzroci otkazivanja su različiti:

prirodni ekstremi

ljudski faktor

modelske pogreške

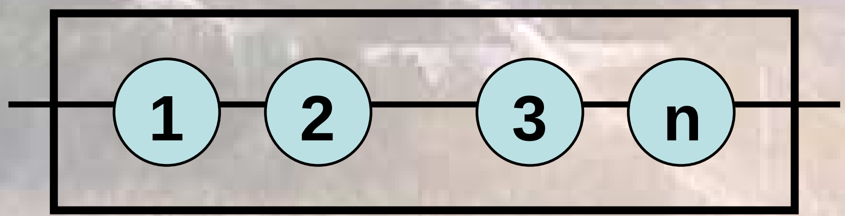
Pouzdanost sustava ovisi o pouzdanosti svake komponente tog sustava.

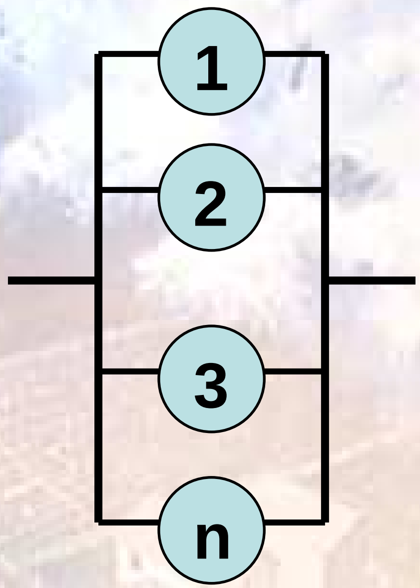
Razlikujemo: Paralelni sustav

Serijski sustav

Paralelni sustav – sustav obavlja svoju funkciju sve dok radi barem jedna komponenta sustava.

Serijski sustav – dolazi do prekida funkcioniranja sustava ukoliko barem jedna komponenta sustava ispadne iz pogona.





Otkazivanje sustava može biti dvojako:

1. **Strukturalno otkazivanje sustava**
   (štetne promjene u strukturi sustava)

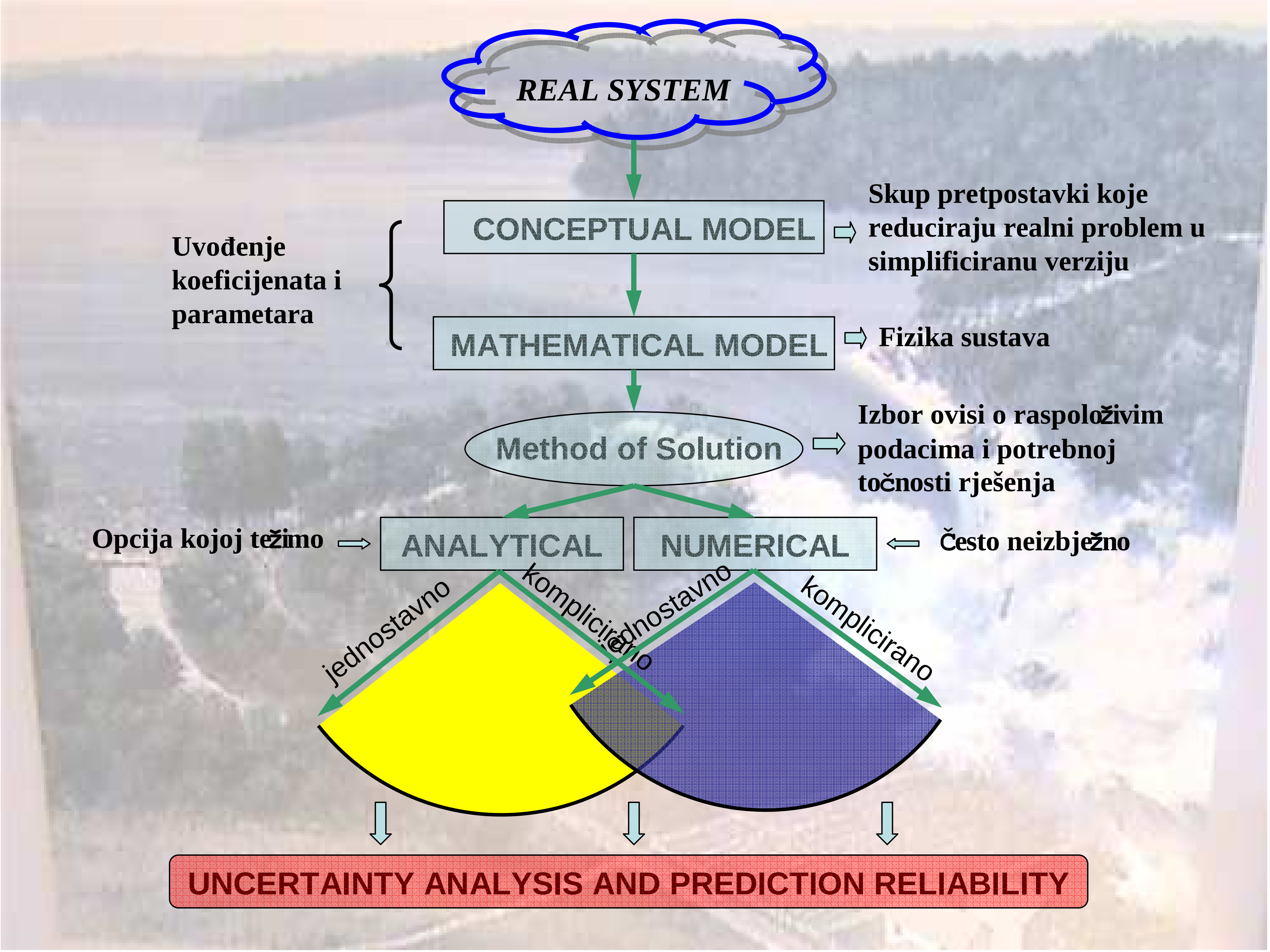
2. **Otkazivanje rada sustava**
   (rad sustava prelazi dozvoljene granice i dolazi do otkazivanja)

U nekim slučajevima strukturalno otkazivanje je povezano s radom sustava kao kod brana, nasipa, mostova i sl., dok kod propusta, sustava za distribuciju vode i prometnih čvorišta isključivo se govori o vjerojatnosti otkazivanja rada sustava

HIDROLOŠKA NEPOUZDANOST

- PRIRODNA
- MODELSKA
- PARAMETARSKA

- **Rizik mogućeg otkazivanja sustava je rezultat kombinacije slučajnog djelovanja vanjskog opterećenja i različitih nepouzdanosti koje se neminovno pojavljuju u procesima analize, dimenzioniranja, te u konstrukcijskim i operativnim procesima**
- **Kvantificiranje nepouzdanost koristeći vjerojatnost i statistiku je jedini pristup analizi pouzdanosti i procjeni rizika**


REAL SYSTEM
CONCEPTUAL MODEL
Skup pretpostavki koje reduciraju realni problem u simplificiranu verziju
Uvođenje koeficijenata i parametara
MATHEMATICAL MODEL
Fizika sustava
Method of Solution
Izbor ovisi o raspoloživim podacima i potrebnoj točnosti rješenja
Opcija kojoj težimo
ANALYTICAL
NUMERICAL
Često neizbježno
jednostavno
komplicirano
jednostavno
komplicirano
UNCERTAINTY ANALYSIS AND PREDICTION RELIABILITY

Zašto se sporo razvijao i primjenjivao koncept analize pouzdanosti i rizika u hidrotehničkim građevinama ?

- Eksperti u inženjerskim procesima i građevinama nisu bili dovoljno uvježbani u primjeni teorije vjerojatnosti i statistike i obrnuto
- Da bi se analizirale sve nepouzdanosti u inženjerskom sustavu često su potrebni interdisciplinarni eksperti
- Inženjeri se često fokusiraju na pojedine komponente sustava a manje na cjelinu dok analize pouzdanosti i rizika isključivo promatraju cjeloviti sustav
- Vrlo česta ne konzistencija u definicijama pouzdanosti i analizi rizika

- Skoro svi inženjerski sustavi smješteni su u prirodi i podložni su različitim opterećenjima i pritiscima.
- Otpor, snaga, kapacitet ili ponuđena količina su sposobnosti inženjerskog sustava da zadovolji svoju predviđenu misiju
- Opterećenje, pritisci i zahtjevi uzrokuju moguće otkazivanje funkcije sustava ako prekoračuju gore navedene sposobnosti
- Upravo sveprisutna i neizbježna nepouzdanost u procjeni otpora i opterećenja rezultira analizi nepouzdanosti i rizika kao važnom dijelu u odlučivanju pri izgradnji i upravljanju inženjerskim sustavima

OSNOVNI KONCEPT

Projektiranje, izgradnja i upravljanje hidrotehničkim sustavom uključuje analizu niza hidroloških, hidrauličkih, geofizičkih, geoloških, ekonomskih i ostalih procesa koji se javljaju u različitim fazama života jednog inženjerskog sustava

Otkazivanje nekog inženjerskog sustava može se definirati kao slučaj kada opterećenje *L* (vanjske sile ili zahtjevi) postaje veće od otpora *R* (snaga, kapacitet ili ponuda) sustava.

Pouzdanost se definira kao vjerojatnost sigurnog rada sustava kada je otpor sustava uvijek veći ili isti opterećenju

$$p_s = P(L \leq R)$$

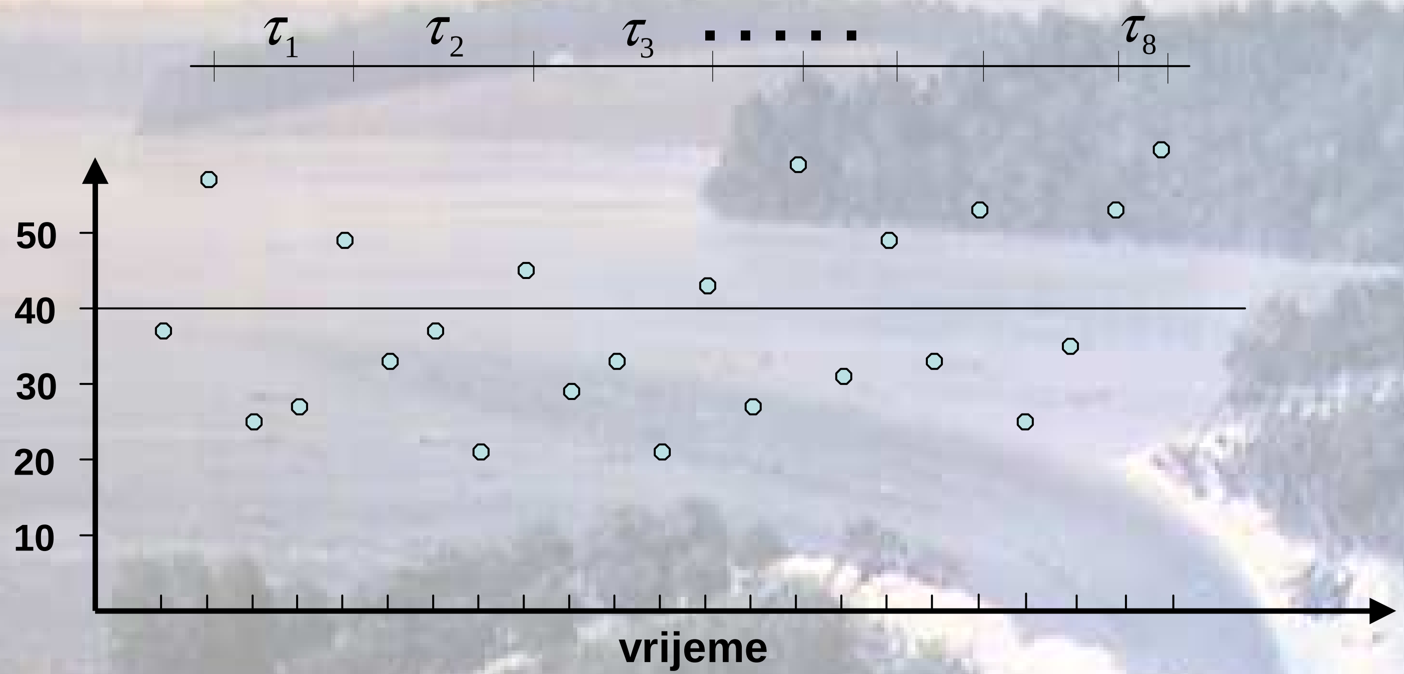
Sukladno tome, vjerojatnost otkazivanja sustava definira se:

$$p_f = P(L > R) = 1 - p_s$$

Konvencionalni inženjerski projekti su se oslanjali na analizi samo prirodne nepouzdanosti i to uglavnom na geofizikalne događaje kao poplave, kišne oluje, potrese i sl. Tada se matematički pouzdanost i njen komplement otkazivanje sustava prikazuje kao:

$$p_s = P(L \le r_*) \qquad p_f = P(L \ge r_*)$$

gdje je *R=r$_*$ fiksna vrijednost otpora.* U klasičnoj inženjerskoj praksi opterećenje je prirodni ekstremni događaj kao poplava, oluja ili potres koji se dešava slučajno u vremenu i prostoru. Mjera pouzdanosti takvih sustava je *povratni period T* koji se definira kao dugoročno srednje vrijeme između dva uzastopna prekoračenja opterećenja.



Povratni period *T* nekog događaja $X \geq x_T$ **je očekivana vrijednost** $E(\tau)$ **, intervala ponavljanja** τ **.**

9 puta se protok od 40 m³/s prekoračio za vrijeme promatranog razdoblja. Dakle, kod 9 prekoračenja $X \geq x_t$ **postoje 8 intervala ponavljanja prekoračenja.**

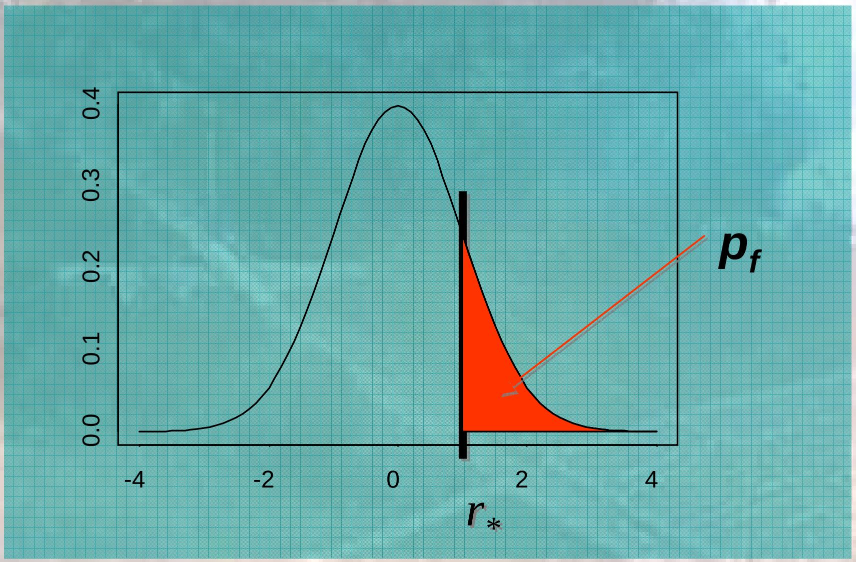
Povratni period T je srednja vrijednost od 8 intervala ponavljanja:

$$E(\tau) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{3}\tau_i = \frac{1}{3}(3+4+4+2+2+2+3+1) = 2.6 \,\text{godine} \; =$$

$$= T = \frac{1}{P(X \geq x_T)} = \frac{1}{9/23} = 2.6$$

Dakle, povratni period *T* se odnosi obrnuto proporcionalno prema vjerojatnosti pojave ekstremnog događaja, *T*=1/p, u bilo kojem vremenskom intervalu. Osnovni nedostatak koncepta povratnog perioda je u tome što se pouzdanost mjeri samo preko srednjeg vremena prekoračenja opterećenja (ekstremnog događaja) bez promatranja interakcije s otporom sustava.

Klasična interpretacija povratnog perioda može se generalizirati kao srednje vrijeme prekoračenja nekog ekstremnog događaja koji uzrokuje otkazivanje sustava. Drugim riječima povratni period se može izračunati kao obrnuto proporcionalna vrijednost vjerojatnosti otkazivanja sustava, $T=1/p_f$



U inženjerskoj praksi postoje druge mjere pouzdanosti koje uzimaju u obzir relativne veličine otpora *R* i predviđenog projektiranog opterećenja *L*:

1. **Margina sigurnosti (MS)** $MS = R - L$
2. **Faktor sigurnosti (FS)** $FS = R/L$
3. ***Srednji faktor sigurnosti*** $\overline{FS} = \overline{R} \big/ \overline{L}$

Analiza nepouzdanosti treba uzeti u obzir sve moguće promjenljivosti i varijabilnosti svih faktora koji potencijalno mogu uzrokovati otkazivanje sustava. Varijabilnost faktora je posljedica prirodne, modelske ili parametarske nepouzdanosti. Postoje dva osnovna koraka u stohastičkoj analizi nepouzdanosti:

1. **Analizirati nepouzdanost svakog stohastičkog faktora u sustavu**
2. **Kombinacijom stohastičkih veličina odrediti pouzdanost cijelog sustava**

Analize nepouzdanosti kod hidrotehničkih građevina vrlo često imaju, otpor (*R*) i opterećenje (*L*) funkcije više slučajnih varijabli,

$$L = g(X_L) = g(X_1, X_2, ..., X_n) \qquad R = h(X_R) = h(X_{n+1}, X_{n+2}, ..., X_{n+K})$$

Tada vjerojatnost pouzdanosti iznosi

$$p_s = P\left[g(X_L) \le h(X_R)\right]$$

Neki primjeri u hidrotehnici:

- **urbani kanalizacijski sustav, opterećenje *L* je dotok na kanalizacijski sustav cijevi, dok je otpor *R* kapacitet cijevi**
- **ocjenjivanje kvaliteta vode, opterećenje *L* je koncentracija ili masa zagađenja koja ulazi u okoliš, dok je otpor *R* dopuštena količina onečišćenja prema regulativama kvalitete vode**
- **u ekonomskim analizama hidrotehničkog sustava, opterećenje *L* može biti ukupan trošak, dok je otpor *R* ukupni profit ili zarada.**

Ovako postavljena analiza pouzdanosti ne razmatra vremensku promjenljivost opterećenja i otpora već promatra najnepovoljnije moguće opterećenje. To se u literaturi naziva *statička analiza pouzdanosti*

U slučajevima kada hidrotehnički sustavi imaju duži vijek trajanja te su podložni različitim prirodnim procesima, inženjeri su također zainteresirani da prate slučajnost pojave opterećenja i moguće promjene otpora sustava tijekom vremena. Takvi primjeri spadaju u *vremenski zavisne analize pouzdanosti*

Funkcija izvođenja i indeks pouzdanosti

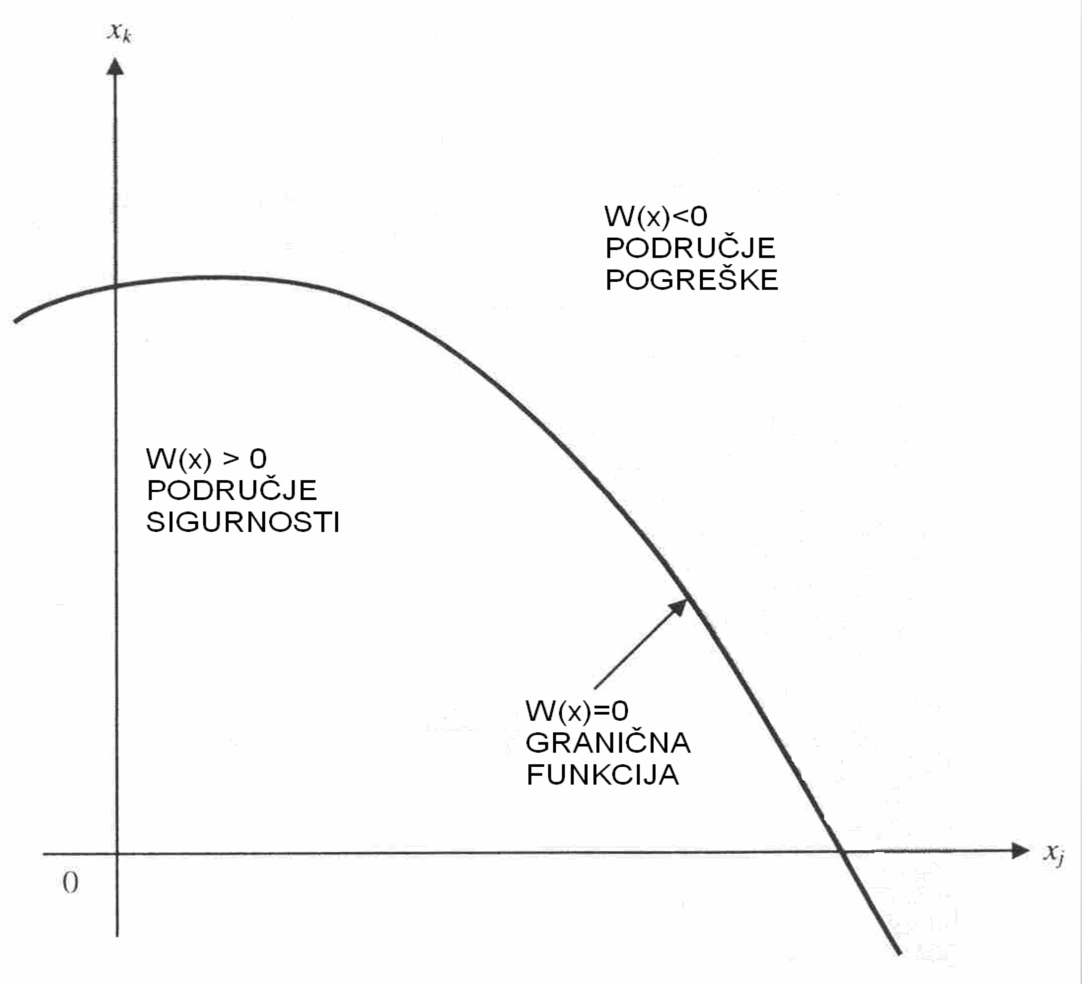
U analizi pouzdanosti vrlo često se koristi koncept funkcije izvođenja *W(X)* koja predstavlja neku kombinaciju između opterećenja *L* i otpora *R*. Tada se vjerojatnost pouzdanosti izražava kao:

$$p_s = P\left[W(X_L, X_R) \geq 0\right] = P\left[W(X) \geq 0\right]$$

gdje vektor X sadrži sve stohastičke varijable koje opisuju opterećenje i otpor hidrotehničkog sustava

Tada se u analizi pouzdanosti promatraju dva stanja; stanje sigurnosti (zadovoljavajuće stanje) definirano kao W(X)>0 i stanje otkazivanja (nezadovoljavajuće stanje) definirano kao W(X)< 0. Granica koja razdvaja stanje sigurnosti od stanja otkazivanja je funkcija graničnog stanja i definira se kao W(X)< 0.

- **STANJE SIGURNOSTI,** W(X)>0
- **STANJE OTKAZIVANJA,** W(X)< 0
- **GRANIČNO STANJE,** W(X)< 0



Funkcija izvođenja W(X) može se izraziti na različite načine i predstavlja inženjerski "input" analizi pouzdanosti. Neki najjednostavniji oblici su:

$$W_1(X) = R - L = h(X_R) - g(X_L)$$

$$W_2(X) = (R/L) - 1 = \left[h(X_R)/g(X_L)\right] - 1$$

$$W_3(X) = \ln(R/L) = \ln\left[h(X_R)\right] - \ln\left[g(X_L)\right]$$

U analizi pouzdanosti kod korištenja funkcije izvodljivosti često se koristi koncept indikatora pouzdanosti β koji se također zove indeks pouzdanosti. Definira se kao odnos srednje vrijednosti i standardne devijacije od funkcije izvodljivosti ili inverzni koeficijent varijacije funkcije izvodljivosti:

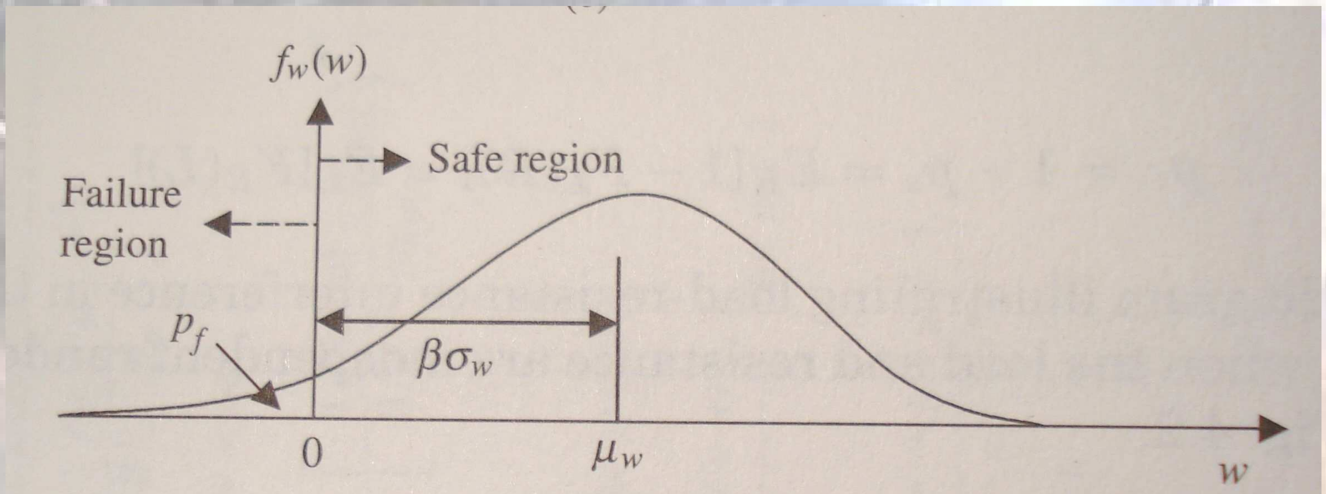
$$\beta = \frac{\mu_w}{\sigma_w}$$

Kad nam je poznata funkcija gustoće za W tada se pouzdanost može izraziti kao:

$$p_s = 1 - F_w(0) = 1 - F_{w'}(-\beta)$$

Gdje je F_w kumulativna funkcija distribucije funkcije izvođenja W dok je w' standardizirani oblik funkcije izvođenja $W' = (W - \mu_w)/\sigma_w$

U primjeni se često koristi Gaussova distribucija za W(x) tako da je pouzdanost W(X)>0 ili grafički



Generalno, izračun vjerojatnosti pouzdanosti zahtijeva poznavanje funkcije gustoće za opterećenje i za otpor ili funkcije izvođenja *W* nekog hidrotehničkog sustava. U slučaju kad poznajemo zajedničku funkciju gustoće otpora i opterećenja, vjerojatnost pouzdanosti iznosi:

$$p_s = \int_{r_1}^{r_2} \left[\int_{l_1}^{r} f_{R,L}(r,l)\,dl \right] dr$$

$$= \int_{l_1}^{l_2} \left[\int_{l}^{r_2} f_{R,L}(r,l)\,dr \right] dl$$

gdje je $f_{R,L}$ zajednička funkcija gustoće otpora *R* i opterećenja *L*, *r* i *l* su varijable integracije dok su (r_1,r_2) i (l_1,l_2) donje i gornje granice za *R* i *L*.

Vjerojatnost otkazivanja se računa po slijedećem izrazu:

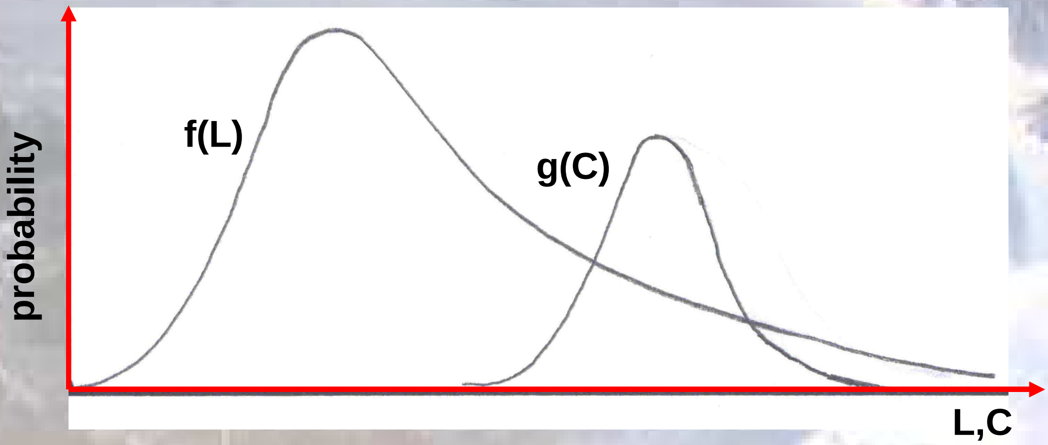
$$p_f = 1 - p_s = \int_{r_1}^{r_2} \left[\int_{r}^{l_2} f_{R,L}(r,l)\,dl \right] dr$$

$$= \int_{l_1}^{l_2} \left[\int_{r_1}^{l} f_{R,L}(r,l)\,dr \right] dl$$

Ovako definirani izrazi za izračun vjerojatnosti pouzdanosti i otkazivanja predstavljaju slučaj kad postoji direktna interakcija otpora i opterećenja kod hidrotehničkih sustava

Analiza pouzdanosti na temelju procjene rizika

- Kapacitet C i opterećenje sustava L su predstavljeni kao funkcije gustoće tako da se vjerojatnost otkazivanja sustava ili rizik mogu izraziti preko slijedećeg izraza:



$$R = P_f(C^* < L) \quad \Rightarrow \quad R = \int_0^\infty \left[\int_{C^*}^\infty f(L)dL \right] g(C)dC$$

- Margina sigurnosti, MS se definira kao razlika kapaciteta i opterećenja:

$$SM = C - L$$

Vjerojatnost otkazivanja je jednaka vjerojatnosti kada je margina sigurnosti manja od nule, tako da je MS komplement od p_f odnosno rizika R:

$$SM = 1 - R \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} \left[\int_0^{C^*} f(L) dL \right] g(C) dC$$

PRIMJER:

Za danu zajedničku funkciju gustoće otpora i opterećenja,

$$f_{R,L}(r,l) = (r + l + rl)e^{-(r+l+rl)}$$

Izračunaj pouzdanost sustava:

$$p_s = \int_0^{\infty}\left[\int_0^{r}(r + l + rl)e^{-(r+l+rl)}dl\right]dr$$

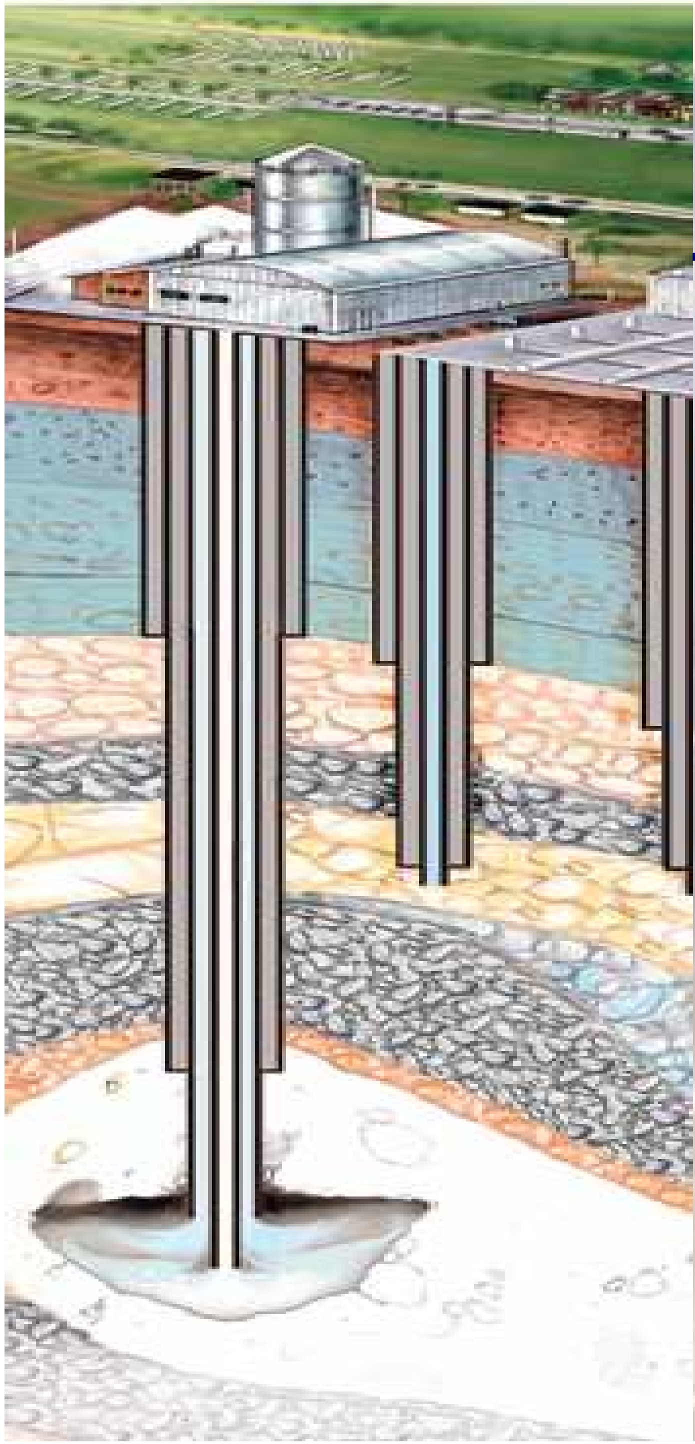
$$= \int_0^{\infty}\left[-(1+l)e^{-(r+l+rl)}\right]_0^{r}dr$$

$$= \int_0^{\infty}\left[e^{-r} - (1+r)e^{-(2r+r^2)}\right]dr = \left[\frac{1}{2}e^{-(2r+r^2)} - e^{-r}\right]_0^{\infty} = 0.5$$

Example No. 3

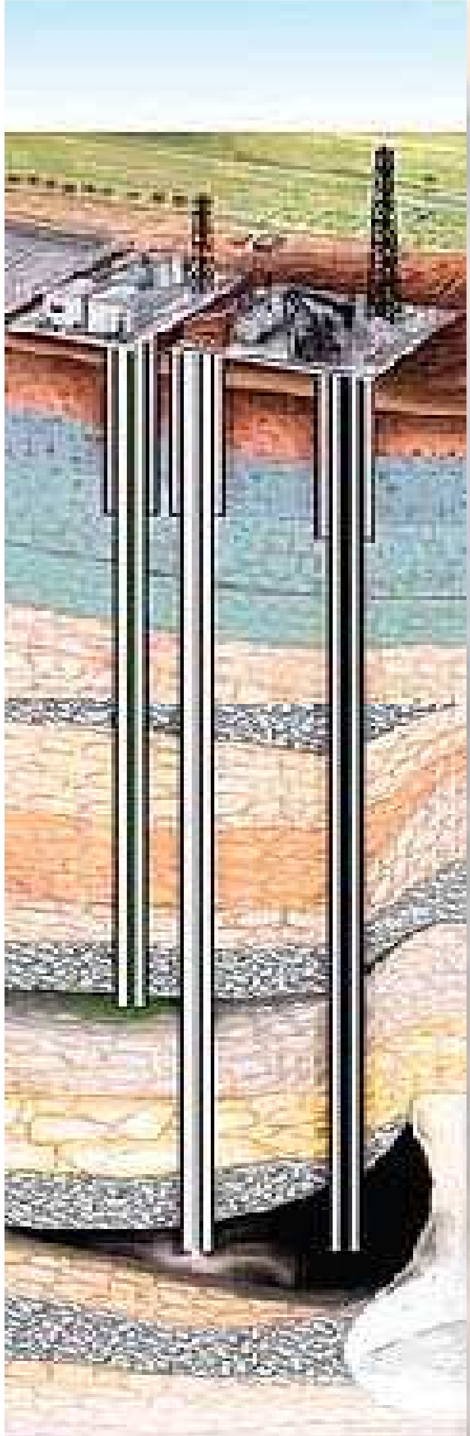
Risk assessment for the case of deep well injection of waste, generated in oil and gas exploration.

- **The concern is to assess the potential risk of injected contaminants reaching the upper shallow horizons consisting of aquifers that could become utilized for water abstraction in the future.**



United States Environmental Protection Agency

Protecting Drinking Water Through Underground Injection Control (UIC) Program



Class II wells – *Inject oil and gas production waste and materials.*

Purpose:

Regulate and manage safe injection of fluid brought to the surface in connection with oil and gas related production, or for enhanced recovery of oil or natural gas, or liquid hydrocarbon storage.

Examples of Fluids:

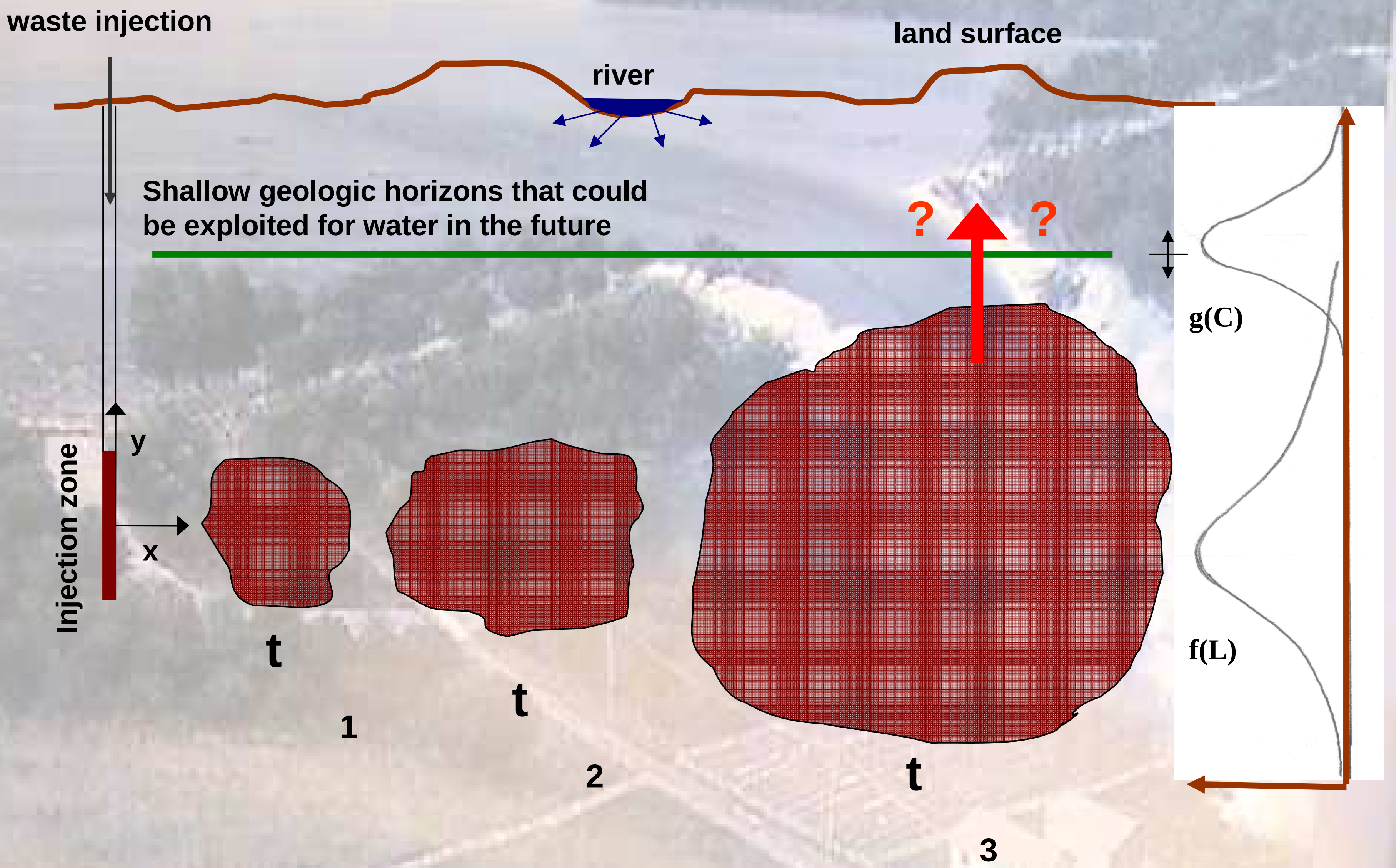
- Produced high salinity brine
- Crude oil (for storage)
- Polymers and viscosifiers for enhanced recovery wells
- Drilling fluids and muds

Protective Requirements:

- *Construction and sitting*
- Cased and cemented to prevent movement of fluids into USDWs
- Construction and design of well (casing, tubing, and packer) varies

KONTROLNI PRESJEK (m)	VRIJEME (god)	RIZIK (-)
2000	250	4.22×10^{-31}
5000	750	6.54×10^{-23}
10000	1600	1.84×10^{-11}
20000	3200	9.31×10^{-9}
40000	6200	3.95×10^{-5}
60000	10000	3.75×10^{-4}

Considered scenario: to assess the potential risk of injected contaminants reaching the upper shallow horizons



Kod slučajeva kada su raspodjele otpora i opterećenja nezavisne varijable, tada se gornji izrazi reduciraju na:

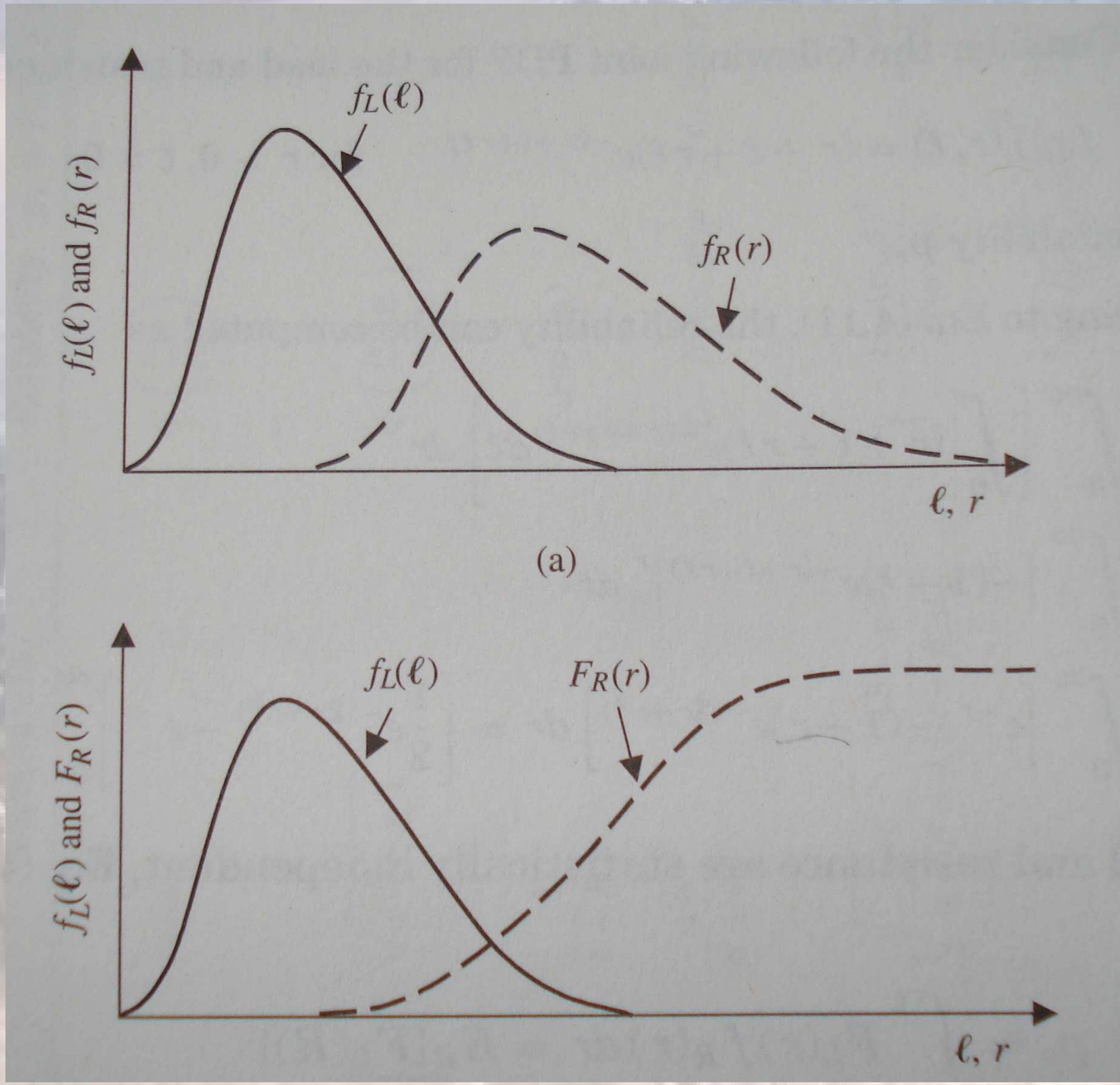
$$p_s = \int_{r_1}^{r_2} F_L(r)\, f_R(r)\, dr = E_R\left[F_L(R)\right]$$

or

$$p_s = \int_{l_1}^{l_2} \left[1 - F_R(L)\right] f_L(l)\, dl = 1 - E_L\left[F_R(L)\right]$$

gdje su F_L i F_R kumulativne funkcije raspodjele opterećenja i otpora dok je E_R oznaka za matematičko očekivanje. Vjerojatnost otkazivanja sustava u slučaju nezavisnih varijabli za R i L iznosi:

$$p_f = 1 - p_s = E_R\left[1 - F_L(R)\right] = E_L\left[F_R(L)\right]$$



$f_L(\ell)$ and $f_R(r)$
$f_L(\ell)$
$f_R(r)$
ℓ, r
(a)
$f_L(\ell)$ and $F_R(r)$
$f_L(\ell)$
$F_R(r)$
ℓ, r

PRIMJER

Ako su opterećenje i otpor nekog sustava nezavisne slučajne varijable sa poznatim funkcijama gustoće koje glase;

$$f_L(l) = 2e^{-2l} \qquad l > 0$$

$$f_R(r) = 4re^{-2r} \qquad r > 0$$

Izračunaj pouzdanost sustava

$$p_s = \int_0^\infty 4re^{-2r}\left[\int_0^r \left(2e^{-2l}\right)dl\right]dr = \int_0^\infty (4re^{-2r})(1-e^{-2r})dr$$

$$= \left[\left(\frac{1}{4}+r\right)e^{-4r} - (1+2r)e^{-2r}\right]_0^\infty = 0.75$$

Ako imamo slučaj kada nam je poznata funkcija izvodljivosti tada se pouzdanost sustava može izraziti kao

$$p_s = \int_0^{\infty} f_w(w)dw$$

U klasičnim hidrotehničkim projektima nepouzdanost hidrauličkih otpora ili kapacitetase se često ignorira ili uzima kao srednja procijenjena vrijednost tako da se pouzdanost takvog sustava izrazi kao

$$p_s = \int_0^{r_0} f_L(l)dl$$

gdje je r_0 otpor ili kapacitet sustava kao detrministička vrijednost

Procjena rizika ili otkazivanje sustava

- **Inženjerski projektirane vrijednosti**
  - **Protok**
  - **Oborine (kiša, snijeg, tuča)**
  - **Vjetar**
  - **Toplina (požar)**
  - **Nivo podzemne vode**
  - **Poplave**
  - **.....**

❑ Empirijski pristup:

$$P(N,n) = \frac{n}{N+n}$$

N = raspoloživi niz godina
n = budući niz godina

Vjerojatnost da će se u slijedećih "*n*" godina najveći obilježena vrijednost u prošlih "*N* " godina izjednačiti ili prekoračiti

- **Ako nas zanima ekstremni period od “m” godina (npr., m godina suše) registriran unutar prošlih “N” godina, postavlja se pitanje koja je vjerojatnost da se isti period od m godina izjednači ili prekorači u slijedećih “n” godina (npr., n godina vijeka trajanja nekog objekta)**

$$P(N,m,n)=\frac{n-m+1}{(N-m+1)+(n-m+1)}=\frac{n-m+1}{N+n-2m+2} \qquad n\geq m$$

***N – m + 1* = broj sekvenci od *m* godina unutar niza od *N* godina**
***n – m + 1* = broj sekvenci od *m* godina unutar budućeg niza od *n* godina**

Example:

Za vrijeme prošlih 40 godina mjerenja protoke postojao je period od 5 godina suše (npr., srednji protok manji od ekološkog minimuma). Kolika je vjerojatnost da će se isti ili veći period ponoviti u slijedećih 20 godina?

N=40, m=5, n=20

$$P(40,5,20) = \frac{20-5+1}{40+20-(2\cdot 5)+2} = 0.308 \Rightarrow \approx 31\%$$

❑ Procjena otkazivanja sustava

Vjerojatnost da je opterećenje veće od projektiranog kapaciteta nekog objekta određenog povratnog perioda, ili $P(x \geq X_T)$gdje T povratni period

Građevina ili hidrotehnički sustav može imati otkazivanje rada ako je projektirani kapacitet premašen trenutnim opterećenjem. To se zove prirodni ili inherentni hidrološki rizik:

$$\overline{R} = 1 - \left[1 - P(x \geq x_T)\right]^n$$

T = povrati period
n = vijek trajanja objekta (sustava)
R = vjerojatnost da će se događaj $x \geq x_T$ dogoditi barem jednom u narednih “n” godina

Example:

- Na autocesti propust za oborinsku vodu ima predviđeni vijek trajanja od 10 godina. Ako prihvatimo 10% šansu da bude potopljen barem jednom u 10 godina, mogu se postaviti slijedeća pitanja:

    1. Koliki je potreban povratni period za projektirani kapacitet?
    2. Kolika je vjerojatnost da tako projektirani propust ne bude potopljen u narednih 50 godina?

Ad 1. $$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^{n} \Rightarrow \qquad 0.10 = 1 - \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{10} \Rightarrow \quad T = 95yr$$

Ad 2. $$\overline{\boldsymbol{R}} = \mathbf{1} - \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{95}}\right)^{\mathbf{50}} = \mathbf{0.41}$$ **(barem jednom u 50 godina)**

P(niti jednom)=1-0.41 = 0.59 → 59%

- ✓ **Zanimljiva činjenica: Za svaki događaj koji ima relativno veliki povratni period isti ili sličan kao i vijek trajanja objekta, slijedi:**

Razvoj u red kod potenciranja

$$\overline{R} = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^{n} \approx 1 - \exp\left(-n/T\right) = 1 - \exp(-1) = 0.632$$

Drugim riječima: Postoji 63% šanse da će događaj sa povratnim periodom “T” biti barem jednom izjednačen ili premašen u slijedećih “n” godina ako vrijedi da su T i n veliki i isti.

Metoda aproksimacije prvog reda

U metodama prvog reda funkcija izvođenja koja je definirana iz otpora i opterećenja razvija se u Taylor-ov red oko referentne vrijednosti. Drugi i viši članovi reda se odbacuju ostavljajući aproksimaciju funkcije s članovima prvog reda. Ako označimo funkciju izvođenja s W(X) tada razvoj u Taylor-ov red izgleda:

$$W(X) = W_0 + \sum_{k=1}^{K} \left[\frac{\partial W(X)}{\partial X_k} \right]_{\mu_x} (X_k - \mu_k) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{K} \left[\frac{\partial^2 W(X)}{\partial X_i \partial X_j} \right]_{\mu_x} (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) + \varepsilon$$

gdje je W_0 je srednja vrijednost funkcije izvođenja, μ_k je vektor srednjih vrijednosti dok ε predstavlja članove višeg reda. Parcijalne derivacije su koeficijenti osjetljivosti koji opisuju promjenu funkcije izvodljivosti pri jediničnoj promjeni varijable X. Ako odbacimo članove drugog i višeg reda tada dobijemo aproksimaciju prvog reda:

$$W(X) \approx W_0 + \sum_{k=1}^{K} \left[\frac{\partial W(X)}{\partial X_k} \right]_{x^0} (X_k - x_k^0)$$

Srednja vrijednost i varijanca funkcije izvođenja izražene aproksimacijom prvog reda iznosi:

$$\mu_W \approx g(\mu_x) = \overline{W}$$

$$Var[W(X)] = \sum_{j=1}^{K}\sum_{h=1}^{K}\left[\frac{\partial W(X)}{\partial X_j}\right]_{\mu_x}\left[\frac{\partial W(X)}{\partial X_h}\right]_{\mu_x} Cov(X_j, X_h) = s^T C_x s$$

gdje $s = \nabla_x W(\mu_x)$ **predstavlja vektor koeficijenata osjetljivosti tako da svaki član vektora iznosi** $\partial W / \partial X_k$ **izračunat korištenjem srednjih vrijednosti** μ_x **dok je *C_x* matrica covarijanci od stohastičkih varijabli *X*. Kada su sve stohastične varijable X nezavisne tada se varijanca od W moze aproksimirati sa:**

$$\sigma_w^2 \approx \sum_{k=1}^{K} s_k \sigma_k^2 = s^T D_x s$$