



SVEUČILIŠTE U SPLITU
UNIVERSITY OF SPLIT
FAKULTET GRAĐEVINARSTVA, FACULTY OF CIVIL ENGINEERING,
ARHITEKTURE I GEODEZIJE ARCHITECTURE AND GEODESY

KVALIFIKACIJSKI DOKTORSKI ISPIT

MULTIFIZIKALNO MODELIRANJE PRONOSA ZAGAĐENJA I TRASERA U KRŠKIM VODONOSNICIMA

Marin Zelenika, dipl.ing.grad.

Split, veljača 2022.godine

MATICE HRVATSKE 15
21000 SPLIT - HRVATSKA /
CROATIA
www.gradst.hr
83615500218

T: +385 (0)21 303 333
F: +385 (0)21 465 117
IBAN:
HR3724070001100579623
E: info@gradst.hr OIB:



**DOKTORSKI
STUDIJ**
VISOKE RAZINE
KVALITETE

MULTIFIZIKALNO MODELIRANJE PRONOSA ZAGAĐENJA I TRASERA U KRŠKIM VODONOSNICIMA

Marin Zelenika

*Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split,
Hrvatska*

Tablica sadržaja

1 Uvod

2 Značenje površinskih i podzemnih voda u kršu

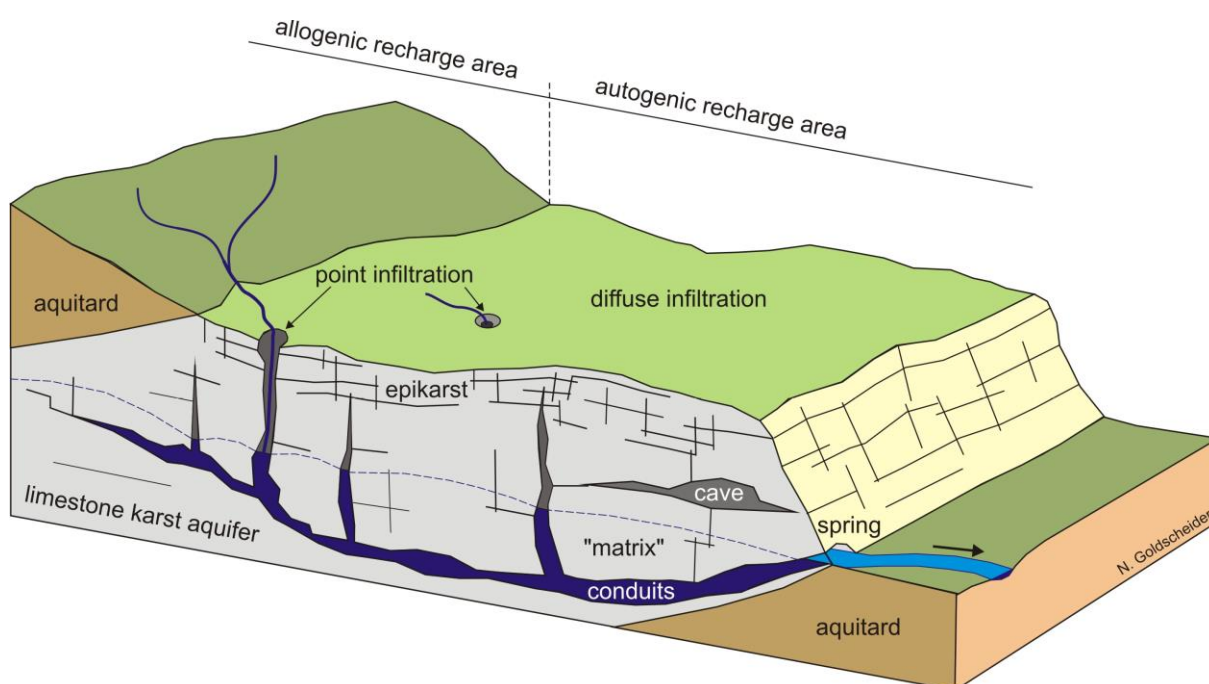
3 Multifizikalno modeliranje tečenja u krškim vodonosnicima

4 Multifizikalno modeliranje pronosa u krškim vodonosnicima

5 Literatura

1.UVOD

Krški sustavi imaju visok stupanj heterogenosti i anizotropije zbog čega se ponašaju drugačije od ostalih vodonosnika. Kao rezultat odgovora na oborine generira se sporo procjeđivanje kroz poroznu matricu i brzo tečenje kroz kanale i pukotine. Skladištenje onečišćenja događa se u poroznoj matrici, ali transport onečišćenja se uglavnom događa preferencijalnim putovima koji su obično nepoznanica, što modeliranje krških sustava čini izazovnim. Numeričko modeliranje krških vodnih sustava izazov je zbog izrazito različitih režima tečenja i pronosa u kanalima i poroznom mediju te zbog složenih interakcija između njih, slika 1: [Goldscheider i Drew, 2007].



Slika 1. Shematski prikaz krškog vodonosnika prema Goldscheideru i Drewu (2007)

Multifizika se odnosi na probleme koji spajaju više fizikalnih pojava [Brown i sur., 2008] tvrde da budućnost znanosti snažno ovisi o sljedećoj tvrdnji: „Današnji problemi, za razliku od tradicionalnih znanosti i inženjerstva, ne uključuju fizikalne procese obuhvaćene jedinstvenom tradicionalnom disciplinom fizike ili pripadajućom matematikom. Složeni sustavi koji se susreću u gotovo svim aplikacijama uključuju mnogo različitih fizikalnih procesa. Pitanje povezivanja različitih događaja na različitim skalama i upravljano različitim fizikalnim zakonima uglavnom je široko otvoreno i predstavlja ogromno izazovno područje za buduća istraživanja.”

Semantički, multifizikalni sustav sastoji se od više komponenti upravljanih vlastitim principima ravnoteže, obično zakonima očuvanja ili konstitutivnim zakonima [Keyes i sur., 2013]. Glavna klasifikacija u takvim sustavima je da li se spajanje-interakcija događa skupno (npr. na preklapajućim domenama pojedinih komponenata) ili sekvencijalno (npr. preko rubnih uvjeta koji prenose protoke, tlakove, flukseve ili pomake). Tipični primjer skupnih multifizikalnih sustava je tečenje u podzemlju

(reaktivni transport) dok tipičan primjer sekvencijalnih multifizikalnih sustava je npr. dinamika oceana i atmosfere u geofizici.

Pristup za modeliranje potpuno integriranih hidroloških procesa površinskog otjecanja, tečenja u kanalima i rijekama povezano s podzemnim tokovima, izvorno je predložen prije četrdeset godina [Freeze i Harlen, 1969], a sada postaje stvarnost. Iako su se uistinu multifizikalni modeli pojavili tek nedavno u literaturi npr. [Vander Kwaak i League, 2001; Kollet i Maxwell, 2008], rastuća baza modela i zajednica modelara-istraživača uvelike pridonose našem razumijevanju spregnutih hidroloških i energetskih ciklusa. Ovi integrirani hidrološki modeli imaju zajedničke značajke po tome što rješavaju neki oblik nelinearne jednadžbe difuzije (npr. Richards) za podzemni protok vode i neki jednostavniji oblik jednadžbi St. Venantove jednadžbe (obično difuznog vala) za površinsko tečenje. Razvijene numeričke i računalne tehnologije dijelom su omogućile nove pristupe za modeliranje ovih povezanih interakcija. Iako svi ovi modeli imaju različite numeričke, diskretizacijske i interakcijske pristupe, dijele zajednički cilj modeliranja - rigorozno i matematički - hidrološki i energetski ciklus kao integrirani sustav. Istraživanje koje se bavi ovim pitanjima obuhvaća niz skala i uključuje razne fizikalne procese.

Među globalno implicitnim hidrološkim modelima postoje dvije različite formulacije za rješenje površinskog i podzemnog toka: interakcija prvog reda [Vander Kwaak i League, 2001] i kontinuitet tlaka [Kollet i Maxwell, 2006]. Tehnika spomenutog multifizikalnog modeliranja pokazuje da povezani površinsko-podzemni procesi zahtijevaju potrebu za višestrukim fizikalnim formulacijama za različite multifizikalne komponente, pažljivo osmišljene strategije spajanja komponenti, potrebe za novim naprednim numeričkim tehnikama, računanje numeričkih i/ili stohastičkih simulacija velikih razmjera s ogromnim brojem nepoznatih stupnjeva slobode (poput tlaka, brzine, koncentracije, temperature, pomaka itd.) u prostornoj i vremenskoj domeni, uključujući visoko paralelno računanje (HPC) i adaptivne višerezolucijske metode. [Malenica, 2019].

2. Značaj površinskih i podzemnih voda u kršu

Otprilike 20-25% svjetske populacije u velikoj mjeri ili u potpunosti ovisi o podzemnim vodama dobivenim iz krških vodonosnika [Ford i Williams, 2007]. Površinske vode imaju veliki utjecaj na kvantitativni i kvalitativni režim podzemnih voda u odgovarajućim hidrogeološkim i hidrološkim uvjetima. Posebno je važno pitanje utjecaja površinskih voda na podzemne vode ukoliko površinske vode imaju utjecaj na izvorišta pitke vode. Utjecaj površinskih voda na izvorišta pitke vode može biti pozitivan i negativan. Pozitivan utjecaj se na našim prostorima uglavnom odražava na prihranjivanje i kvantitativne karakteristike izvorišta, dok se negativni utjecaj najčešće odražava na kvalitetu podzemnih voda. Utjecaj površinskih voda na izvorišta pitke vode u najvećoj mjeri zavisi od:

- Hidrogeoloških karakteristika terena
- Tipa vodonosnika

- Hidroloških odlika površinskih voda
- Klimatskih prilika i
- Ljudskih aktivnosti u slivnom području površinskih voda i zoni prihranjivanja izvorišta.

U cilju definiranja utjecaja površinskih voda na izvorišta pitke vode potrebno je definirati navedene prirodne i umjetne faktore, te kroz monitoring površinskih i podzemnih voda pozitivni utjecaj održavati na optimalnom nivou, a svaki negativni utjecaj smanjiti na najmanju moguću mjeru.

Hidrogeološke karakteristike terena imaju možda najveći značaj za definiranje utjecaja površinskih voda na podzemne vode, odnosno izvorišta pitke vode. Tim prije što od hidrogeoloških karakteristika terena, odnosa propusnih i nepropusnih poroznih formacija, položaja akvifera u odnosu na površinske vode, uvjeta prihranjivanja, propusnosti i hidrogeoloških parametara zavisi egzistiranje akvifera, obnavljanja njegovih rezervi i stanje kvaliteta podzemnih voda. Također, kada je riječ o površinskim vodama sa hidrogeološkog aspekta, veoma je važno u kakvu poroznu formaciju je rijeka usjekla svoje korito (propusnu ili nepropusnu), kakav je položaj rijeke u odnosu na akvifer, kakav je hidraulički odnos rijeke i akvifera, kakve su geomorfološke odlike korita (meandri, zavoji, i dr.), da li rijeka prihranjuje akvifer ili ga drenira, kako i pri kojim hidrološkim uvjetima se to događa, mijenja ili ne mijenja, i u kolikoj mjeri? [Freeze i Cherry, 1979].

3. Multifizikalno modeliranje tečenja u krškim vodonosnicima

Za pravilno upravljanje vodama i njihovu zaštitu važno je razumjeti i znati predvidjeti tečenje podzemnih voda u kršu. Numeričko modeliranje učinkovita je metoda za opisivanje mnogih fizikalnih pojava hidrologiji i hidrogeologiji. Površinski tokovi su najčešće opisani 1-D tokom koji opisuje tečenje u kanalima, rijekama ili krškim dubokim provodnicima, 2-D površinskim tokom koji opisuje površinsko otjecanja preko gornje površine domene ili terena uslijed oborina i 3-D tokom kroz poroznu matricu [de Rooij, 2013].

Tečenje u varijabilno saturiranim poroznim sredinama može se opisati zakonom očuvanja mase i Darcy-evim zakonom. Kombinirajući navedene dvije jednačbe dolazi se do mješovite formulacije Richards-ove jednačbe koja glasi [Clement, Wise i Molz, 1994].

$$S(h_M) \cdot S_S \frac{\partial(h_M)}{\partial t} \cdot \frac{\partial\theta(h_M)}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{K}(h_M) \cdot \nabla h_M) + q \quad (1)$$

gdje je S [–] saturiranost tla, $S_S[L^{-1}]$ koeficijent specifičnog uskladištenja, θ [–] vlažnost tla, $h_M[L]$ piezometarska visina u poroznoj matrici, $\mathbf{K} [L/T]$ tenzor hidrauličke propusnosti i $q [1/T]$ je član koji opisuje izvore i ponore (crpljenje i prihranjivanja), ali može služiti i za uspostavljanje veze između porozne matrice i krških kanala. Iako konstitutivni odnosi između θ i h_M omogućuju da se jednačba (1) napiše kao funkcija samo jedne nepoznanice (θ ili h_M), numerički je najpovoljnije aproksimirati direktno izraz (1). Linearizacija vlažnosti θ preko piezometarske visine h_M omogućuje da je nepoznata varijabla pri rješavanju problema samo piezometarska visina h_M .

Tečenje u krškim kanalima je u pravilu potpuno opisanom sustavom Navier-Stokes-ovih jednadžbi. Međutim, kako je rješavanje punih 3D jednadžbi računalno veoma zahtjevno, kao što i mogućnost strujanja sa slobodnim vodnim licem dovodi do problema modeliranja ili višefaznog tečenja (vode i zraka) ili nepoznate geometrije vodnog lica (geometrijska nelinearnost), tim problem postaje još zahtjevniji. Da bi razvijeni model bio primjenjiv (na skali realnog krškog vodonosnika) potrebno je pojednostavniti matematički model tečenja u krškom kanalu. Jedna od mogućnosti je koristiti 1D Saint-Venant-ove jednadžbe koje opisuju tečenje u otvorenim koritima, ali uz manje modifikacije mogu aproksimirati i tečenje u cijevima pod tlakom. Sustav Saint-Venant-ovih jednadžbi je definiran jednadžbom očuvanja mase:

$$B(h_C) \frac{\partial h_C}{\partial t} + \frac{\partial(A(h_C)u)}{\partial x} = q \quad (2)$$

te jednadžbom očuvanja količine gibanja:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{g} u \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\partial h_C}{\partial x} + S_f = 0 \quad (3)$$

gdje je $B [L]$ širina kanala u razini vodnog lica, $A [L^2]$ površina poprečnog presjeka toka, $u=Q/A [L/T]$ je srednja brzina u presjeku, $Q[L^3/T]$ protok, $q [L^2/T]$ član izvora i ponora, ali može biti i fluks interakcije između kanala i matrice, $g [L/T^2]$ gravitacijsko ubrzanje, $h_C [L]$ piezometarska visina u kanalu izmjerena od pretpostavljene referentne ravnine, a $S_f [-]$ nagib energetske linije. U ovisnosti o relativnoj važnosti pojedinih članova u jednadžbi (3), različite aproksimacije Saint-Venant-ovih jednadžbi mogu biti definirane. Najjednostavnija aproksimacija koja opisuje nestacionarno tečenje i efekte povratnog toka (tj. mirni režim strujanja) je ne-inercijska aproksimacija Saint-Venant-ovih jednadžbi:

$$B(h_C) \frac{\partial h_C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K_C(h_C) \partial h_C}{\sqrt{|\frac{\partial h_C}{\partial x}|} \partial x} \right) = q \quad (4)$$

Navedena difuzijsko-valna jednadžba („diffusion wave equation“) opisuje nestacionarno tečenje sa slobodnim vodnim licem u otvorenim kanalima kada su inercijski članovi znatno manji od članova gravitacije, trenja i tlaka. Jednadžba (4) se može koristiti i za tečenje pod tlakom tako da se za geometriju zatvorenog kanala pretpostavi postojanje fiktivnog proreza na vrhu kanala, tzv. „Preissmann-ov slot“. [de Rooij, 2013].

Između ostalog, problemi multifizike u složenim vodnim sustavima, uključujući interakciju površinskih i podzemnih voda, već su prepoznati kao tipični primjeri gdje zasebne analize ne predstavljaju realna i prihvatljiva rješenja [Malenica i drugi, 2018]. Štoviše, različiti problemi, uključujući dodatne učinke geomehanike, elastičnosti, termodinamike, električne energije ili zračenja, mogu učiniti analizu u više vodnih sustava još složenijom, što se može uspješno riješiti samo multifizikalnim pristupom.

Multifizikalni pristupi s više domena zahtijevaju povezivanje kontinuiranih i/ili diskretnih modela u prostoru i vremenu. Ova veza mora poštovati matematičku formulaciju povezanog problema i mora uzeti u obzir različite prostorne mreže i vremenske diskretizacije koje se koriste u svakoj domeni [Keyes i drugi, 2013]. Na primjer, problemi s interakcijom 3-D toka porozne matrice i 1-D površinskog toka u otvorenim koritima, rijekama ili krškim kanalima, se realiziraju koristeći formulaciju fluksa prvog reda u obliku $q_{ex} = \alpha_{ex}(h_C - h_m)$ koji ovisi o razlici između piezometarskih visina u obje domene i parametru izmjene koji je obično konstantan (slike 2 i 3), dobiven postupkom kalibracije i stoga fizikalno neutemeljen jer se ne može mjeriti [Malenica i drugi, 2018].

Stoga je potrebna posebna diskretizacija u površinskoj i podzemnoj domeni, ali i na spoju domena gdje se odvija razmjena flukseva. [Putti i Paniconi, 2015] iznijeli su cjelokupni pregled o modeliranju u sustavima površinskih i podzemnih voda, a posebno ističu ne fizikalnu ulogu spomenutog parametra izmjene.

Kod modeliranja tečenja vode u kršu mogu se definirati dva glavna problema: praktični i teoretski [de Rooij, 2008]. Praktični problem predstavljaju nepoznati podaci o realnih krškim vodonosnicima, tj. ulazni podaci za modeliranje kao što su geometrija i pozicija kanala, parametri tla, stvarna raspodjela kiše, itd., te su u praksi uvijek ograničeni i često nedovoljni za realne simulacije.

Teoretski problem je taj što krš predstavlja kompleksan hidraulički sustav koji nije jednostavno matematički opisati. Velike računalne domene, kompleksna geometrija, različite specifične krške formacije, kao i nelinearnost matematičkih jednadžbi čine ovaj problem izuzetno zahtjevnim za modeliranje. Također, tečenje u kanalima i matrici su fizikalno dosta različiti, što se prenosi na matematičke jednadžbe koje su različitog karaktera i čija se rješenja mijenjaju na različitim vremenskim i prostornim skalama. Različite jednadžbe za tečenje u matrici i kanalima čini krš spregnutim („coupled“) problemom brzog, često turbulentnog tečenja u krškim kanalima i sporog laminarnog tečenja u poroznoj matrici.

Interakcija porozne matrice i krških kanala temelji se na iterativnom (odvojenom) pristupu spajanja. U ovom pristupu svaki sustav ima svoje vlastito rješenje, te se izvodi iterativni postupak dok se ne postigne konvergencija oba sustava. Vremenska diskretizacija temelji se na dobro poznatoj implicitnoj Eulerovoj metodi, dok se Picardova tehnika koristi za linearizaciju spomenutih nelinearnih jednadžbi.

4. Multifizikalno modeliranje pronosa u krškim vodonosnicima

Na pronos zagađenja i trasera u krškim vodonosnicima utječe advekcija, disperzija, difuzija te degradacija ili npr. geokemijske reakcije kao što su sorptivni procesi [Delleur, 1999]. Pronos u obje domene krškog vodonosnika (porozna matrica i krški kanali) opisan je dobro poznatom advektivno-disperzijskom jednadžbom - ADE [de Rooij, 2013]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla(c \cdot v) - \nabla(D_H \cdot \nabla c) = cQ_p + c^*Q_R \quad (5)$$

gdje je c koncentracija [M/L^3] faze, a c^* koncentracija injektiranog fluida ili prihranjivanja. Prvi član predstavlja vremensku promjenu mase (koncentracije) faze, drugi član pokazuje promjenu mase faze zbog promjene ili divergencije advektivnog fluksa faze na granici ili rubu kontrolnog volumena, treći član pokazuje promjenu mase faze zbog promjene ili divergencije sume disperzivnog i difuznog fluksa faze na granici ili rubu kontrolnog volumena, dok desna strana uključuje utjecaj crpljenja i prihranjivanja kao vanjskog djelovanja unutar volumena.

Brojne su numeričke tehnike za rješavanje ADE jednadžbe te se mogu klasificirati kao: (a) Eulerove metode, uključujući klasične metode konačnih razlika, konačnih elemenata ili konačnih volumena; (b) Lagrangeove metode; i (c) hibridne (Euler-Lagrangeove) metode [Zheng i Bennet, 2002].

ADE jednadžba zbog postojanja advektivne prenosne komponente postaje numerički mnogo zahtjevnija, posebice za konvencionalne Eulerove algoritme konačnih volumena i elemenata. Naime, svi ti klasični postupci su ovisni o prostornoj diskretizaciji i veličini blokova npr. u Modflow-u [Harbaugh i drugi, 2005] ili konačnih elemenata npr. u programu FE-FLOW [Diersch i Kolditz, 1998]. Ključan parametar za numeričku stabilnost tih postupaka je grid Pecletov broj. Za tenzor disperzije neovisan o brzini vrijedi: $Pe_i = \frac{v_i \Delta x_i}{D_{ii}} \leq 2$; $i = x, y, z$.

Pecletov broj traži za veću heterogenost jako finu prostornu i vremensku rezoluciju (diskretizaciju) da bi Eulerovi modeli bili upotrebljivi. Za izrazito advektivno dominantne probleme Pe broj teži ka beskonačnosti jer disperzija postaje zanemariva. Ovo je razlog zašto konvencionalni Eulerovi modeli sve češće gube svoju uporabljivost u praksi.

Langrangeova metoda praćenja čestica („particle tracking“) kod rješavanja ADE jednadžbe kada je dominantna advektivna prenosna komponenta odvojeno rješava advektivnu i disperzivnu komponentu zbog čega nema ograničenja u vidu Pe broja i numeričkih nestabilnosti, te je prikladna za analize pronosa. Ako se disperzija zanemari ADE se svodi na čistu advektivnu jednadžbu po strujnici: $\frac{\partial c}{\partial \tau} = 0$ iz čega slijedi da je za advekciju koncentracija čestice na strujnici (trajektoriji)

konstantna. Teoretski, ako podijelimo traser ili zagađenje na beskonačno dijelova, možemo egzaktno definirati polje koncentracije. Nažalost, to nije analitički moguće, pa zbog toga problem advekcije rješavamo metodom praćenja čestica po trajektorijama. Pošto nemamo na raspolaganju beskonačno čestica, dobivenom diskretnom skupu čestica moramo pridružiti neku prostornu diskretizaciju, i to najčešće grid koji smo koristili u proračunu tečenja. Tada svakom čvoru konačnih elemenata ili Modflow bloku pridodajemo odgovarajući broj čestica sa svojom masom. Podijelivši masu svih čestica sa pripadajućim volumenom dobivamo koncentraciju. Principijelna mana ove metode je što ne rješava direktno koncentraciju, nego posredno preko računanja lokacija čestica i postupka osrednjavanja na gridu tečenja. Prostorna diskretizacija koju smo usvojili u modeliranju tečenja determinira cijeli proces i toka i pronosa. Diskretizacija određuje skalu na kojoj je definirana heterogenost, a samim time i polje brzina. Nadalje, ta skala određuje kolike će vrijednosti biti u

tenzoru disperzije te također definira Pecletov i Courantov broj kojim su zadani numerički kriteriji stabilnosti numeričkog modeliranja. Jedan od praktičnih načina je da česticu koju smo pratili od mjesta utiskivanja do završne točke integriramo unazad od završne točke do područja utiskivanja. Slijedeći odabir je metoda praćenja čestica sa slučajnim pomakom „random walk particle tracking“, npr. [La Bolle i ostali, 1996, Zheng i Bennet, 2002]. Da bi osim advekcije promatrali disperziju potrebno je proračunu „particle tracking“ tipa dodati izračun disperzivnog koraka. Veličina disperzivnog koraka je determinirana korijenom dvostrukog umnoška disperzije i vremenskog koraka. Analiza pronosa direktno ovisi o kvaliteti aproksimacije brzina. Ova metoda je jednostavna i intuitivna, pogodna za advektivno dominantne procese i velike Pe brojeve. Nažalost, njena mana također leži što koncentraciju računa posredno preko položaja čestica što znači da izrazito ovisi o broju čestica, osobito u slučaju velike heterogenosti i varijacija brzina te postojanja zona sa značajnim crpljenjem. Stoga ona nije uvijek imuna na pojavu numeričkih oscilacija i umjetnih disperzija.

Euler-Lagrangeova hibridna formulacija pronosa [Zheng i Bennet, 2002] koristi npr. metodu konačnih elemenata za disperziju i »backward particle tracking« metodu za advekciju. U prvom Lagrangeovom (advektivnom) koraku Euler-Lagrangeova postupka vrši se izračun polja koncentracije u čvorovima $x_i(t_{n+1})$ mreže konačnih elemenata tako da se praćenjem čestice unatrag („backward particle tracking“) odredi položaj čestice $x_i(t)$ koja je prešla put od čvora – i - mreže konačnih elemenata do točke $x_i(t)$ za pripadajući vremenski korak Δt koristeći Lagrangeove kinematičke jednadžbe:

$$x_i(t_n) = x_i(t_{n+1}) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} v [x_i(\xi)] d\xi, \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

Iako model za rješavanje disperzije favorizira implicitne algoritme rješenja uz moguću upotrebu velikih vremenskih koraka, modeliranje advekcije obično koristi eksplicitni algoritam s vremenskim koracima ograničenim Courant-Freidrich-Levy (CFL) kriterijem $\frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}$. Vremenski korak Δt treba biti dovoljno mali da točka koja se nalazi u čvoru mreže pri putovanju po strujnici ne pređe jedan element mreže konačnih elemenata (CFL kriterij). Nakon određivanja strujnice, koncentracija se dobije linearnom kombinacijom baznih funkcija i poznatih koncentracija u čvorovima mreže konačnih elemenata. Ta koncentracija se koristi kao početni uvjet za drugi (disperzivni) korak Euler-Lagrangeove metode.

U drugom (disperzivnom) koraku Euler-Lagrangeova postupka vrši se izračun polja koncentracije u trenutku t_{n+1} sa početnim vrijednostima koje odgovaraju koncentraciji dobivenoj iz prvog advektivnog koraka. Na ovaj način advekcija se dakle rješava Lagrangeovom klasičnom particle tracking metodom, a disperzija klasičnom MKE na isti način kao i tečenje jer se radi o istovjetnom disperzivnom tipu problema.

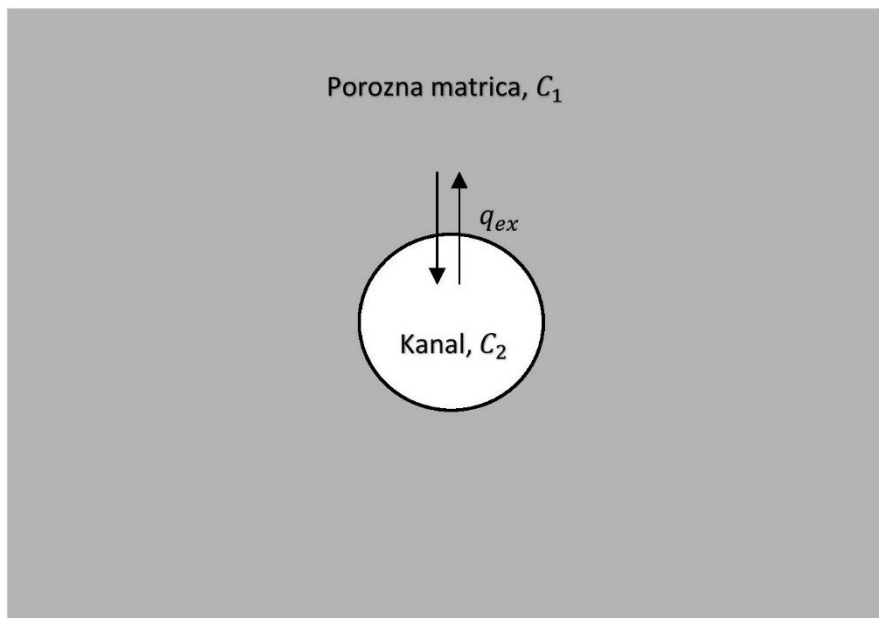
Interakcija pronosa između 1-D krških kanala, 2-D površinskog otjecanja i 3-D porozne matrice omogućava jednostavniju strategiju nego što je to pokazano u slučaju tečenja [Yeh i ostali, 2006].

Kako je pronos opisan samo sa ADE jednadžbom u sva tri dijela domene, fluks interakcije između njih se može jednostavno opisati pod pretpostavkom da uzimamo u obzir na granicama samo advektivni dominantni fluks. U tom slučaju fluks advektivnog pronosa na granici između bilo koja dva spomenuta područja može se definirati s obzirom na veličinu i smjer fluksa tečenja izmjene između njih (vidi sliku 2 i 3):

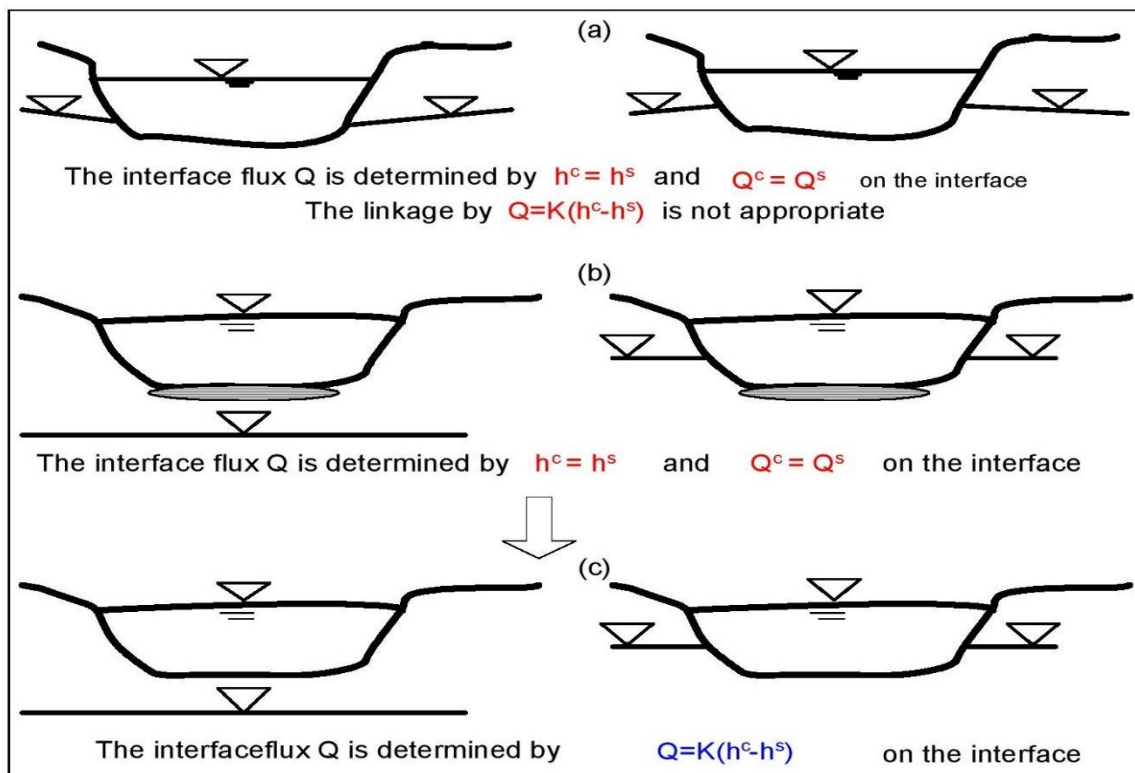
$$F_{adv,ex} = q_{ex}c_D; c_D = c_1 \Rightarrow q_{ex} \text{ usmjeren od domene 1 prema domeni 2}$$

$$c_D = c_2 \Rightarrow q_{ex} \text{ usmjeren od domene 2 prema domeni 1} \quad (7)$$

Ovo vrijedi kada je polje koncentracije diskontinuirano što je čest slučaj, no ako je koncentracija u datom slučaju kontinuirana između bilo koje dvije domene, tada izraz (7) mijenjamo sa jednakosti koncentracija na granici u obje te domene.



Slika 2. Interakcija pronosa između krškog kanala i porozne matrice



Slika 3. Interakcija protoka/pronosa između kanala i porozne matrice a) nema tankog sloja sedimenta

b) postoji tanki sloj sedimenta c) nema interakcije

Među modelima tečenja i pronosa koji su temeljeni na problematici interakcije različitih vodnih domena ističu se MIKE11-MIKE SHE [Abbott i sur., 1986a, 1986b], SHETRAN [Ewen i sur., 2000], MODFLOW-HMS [HydroGeoLogic, Inc., 2001], InHM [VanderKwaak, 1999], GISWA [Wigmosta i Perkins, 1997], SFRSM-HSE [SFWM, 2005], COSFLOW [Yeh i sur., 1997], WASH123D Verzija 1.0 [Yeh i sur., 1998].

5. Literatura

Abbott, M. B., Bathurst, J. C., Cunge, J. A., O'Connell, P. E., and Rasmussen, J. (1986). "An introduction to the European hydrological system-systeme hydrologique European, 'SHE' 2: Structure of a physically based, distributed modeling system." J. Hydrol., 87, 61– 77.

Brown D, et al. (2008). Applied mathematics at the U.S. Department of Energy: Past, present, and a view to the future. Office of Science, U.S. Department of Energy. Available at: http://science.energy.gov/~media/ascr/pdf/program-documents/docs/Brown_report_may_08.pdf.

David E Keyes, Lois C McInnes, Carol Woodward, William Gropp, Eric Myra, Michael Pernice, John Bell, Jed Brown, Alain Clo, Jeffrey Connors, et al. (2013). Multiphysics simulations: Challenges and opportunities. The International Journal of High Performance Computing Applications, 27(1):4–83.

Delleur JW (1999). The handbook of groundwater engineering. CRC, Boca Raton, FL.

de Rooij R. (2008). Towards improved numerical modeling of karst aquifers: coupling turbulent conduit flow and laminar matrix flow under variably saturated conditions, University of Neuchatel.

de Rooij, R., Graham, W., and Maxwell, R. M.,(2013). A particletracking scheme for simulating pathlines in coupled surface-subsurface flows, *Adv. Water Resour.*, 52, 7–18, <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2012.07.022>.

Diersch HJG, Kolditz O., (1998). Coupled ground water flow and transport: 2. Thermohaline and 3D convection systems. *Advance in Water Resources* 21: 401-425.

D. Ford and P. D. Williams,(2007). *Karst hydrogeology and geomorphology*, John Wiley & Sons Ltd.

Ewen, J.; Parkin, G.; O'Connell, (2000). P.E. SHETRAN: Distributed River Basin Flow and Transport Modeling System. *J. Hydrol. Eng.*, 5, 250–258.

Freeze, R.A. and Cherry, J.A. (1979). *Groundwater*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, Vol. 7632, 604.

Freeze RA and Harlan RL (1969). Blueprint for a physically-based digitally-simulated, hydrologic response model. *Journal of Hydrology* 9: 237–258.

Harbaugh, A.W.,(2005). "MODFLOW-2005, The U.S. Geological Survey Modular Ground-Water Model-the Ground-Water Flow Process".

HydroGeoLogic, Inc., (2001). MOD-HMS: A Comprehensive MODFLOW-based Hydrologic Modeling System. Version 1.1. Document and Users Guide, HydrolGeoLogic Inc., Herndon, Virginia

Yeh, G. T., J. R. Cheng, M. H. Li, H. P. Cheng, and H. C. Lin, (1997). COSFLOW: A Finite Element Model Coupling One-Dimensional Canal, Two-Dimensional Overland, and Three-Dimensional Subsurface Flow. Technical Report CHL-97-20. U. S. Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station, 39909 Halls Ferry Road, Vicksburg, MS 39180-6199. 188 pp.

Yeh, G. T., H. P. Cheng, J. R. Cheng, and Jerry H. Lin. (1998). A Numerical Model to Simulate Water Flow and Contaminant and Sediment Transport in Watershed Systems of 1-D Stream-River Network, 2-D Overland Regime, and 3-D Subsurface Media (WASH123D: Version 1.0). Technical Report CHL-98-19. Waterways Experiment Station, U. S. Army Corps of Engineers, Vicksburg, MS 39180-6199.

Yeh, G. T., et al. (2006). "A first principle, physics-based watershed model: WASH123D." *Watershed models*, V. P. Singh, and D. K. Frevert, eds., CRC, Boca Raton, Fla.

Kollet, S.J.; Maxwell, R.M.(2006). Integrated surface–groundwater flow modeling: A free-surface overland flow boundary condition in a parallel groundwater flow model. *Adv. Water Resource*, 29, 945–958. [CrossRef]

Kollet SJ and Maxwell RM (2008). Capturing the influence of groundwater dynamics on land surface processes using an integrated, distributed watershed model. *Water Resources Research* 44(2): 18. DOI 10.1029/2007WR006004

La Bolle, E. M., Fogg, G. E., Tompson, A. F. B.,(1996). „Random-Walk Simulation of Transport in Heterogeneous Porous Media: Local Mass-Conservation Problem and Implementation Methods“, *Water Resour. Res.*, 32(3), 583–593.

Luka Malenica, Hrvoje Gotovac, Grgo Kamber, Srdjan Simunovic, Srikanth Allu, Vladimir Divić; (2018).Groundwater flow modeling in karst aquifers: Coupling 3D matrix and 1D conduit flow via control volume isogeometric analysis - experimental verification on 3D physical model, *Water*, 10(12), 1787; <https://doi.org/10.3390/w10121787>.

Luka Malenica,(2019). Numerical modeling based on spline basis functions: Application to groundwater flow modeling in karst aquifers and advection dominated problems (In Croatian). PhD thesis.

N. Goldscheider and D. D. P. Drew,(2007). *Methods in karst hydrogeology*. Taylor & Francis, p. 264, ISBN: 0415428734.

Paniconi, C.; Putti, M.(2015). Physically based modeling in catchment hydrology at 50: Survey and outlook. *Water Resour. Res.*, 51, 7090–7129.

SFWMD (South Florida Water Management District), 2005. Regional Simulation Model (RSM): Theory Manual. South Florida Water Management District (SFWMD), Office of Modeling, 3301 Gun Club Road, West Palm Beach, FL 33406.

T. P. Clement, W. R. Wise, and F. J. Molz,(1994). “A physically based, twodimensional, finite-difference algorithm for modeling variably saturated flow”, *Journal of Hydrology*, vol. 161, no. 1-4, pp. 71–90.

VanderKwaak, J. E., (1999). Numerical Simulation of Flow and Chemical Transport in Integrated Surface-Subsurface Hydrologic Systems [InHM]. Ph.D. Thesis, Dept. of Earth Science, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.

VanderKwaak JE and Loague K (2001). Hydrologic-response simulations for the R-5 catchment with a comprehensive physics-based model. *Water Resources Research* 37: 999–1013.

Wigmosta, M. S. and Perkins, (1997). A GIS-Based Modeling System for Watershed Analysis [GISWA]. Final Report to the National Council of the Paper Industry for Air and Stream Improvement. 160 pp.

Zheng,C.,G.D.Bennett,(2002). *Applied Contaminant Transport Modeling*, John Wiley & Sons Ltd.